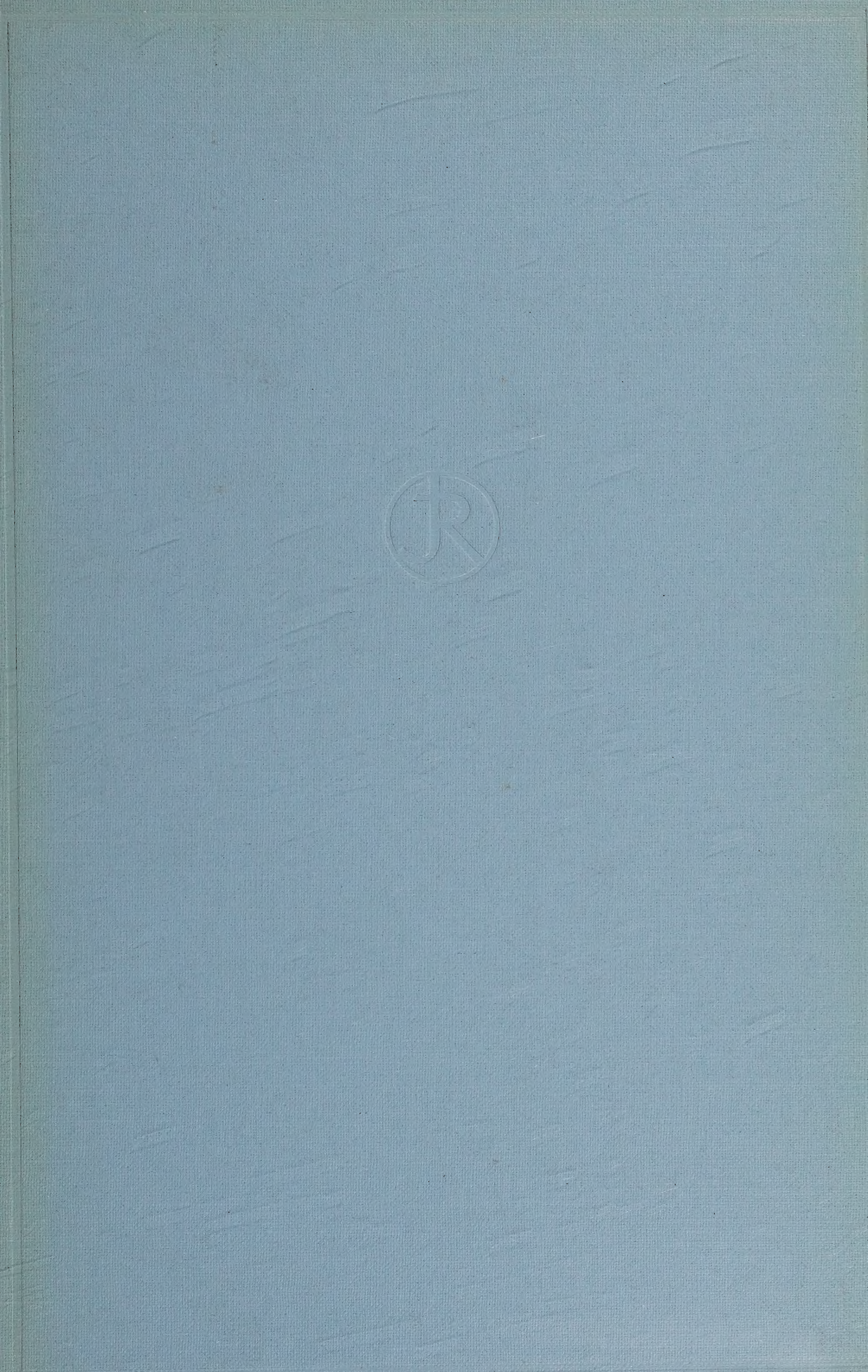




ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

Том 8

BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS

SÉRIE MATHÉMATIQUE

Tome 8

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
Москва ★ 1944

Reprinted with the permission of Mezhdunarodnaja Kniga, Moscow

JOHNSON REPRINT CORPORATION
111 Fifth Avenue
New York 3, New York

Johnson Reprint Company Limited
Berkeley Square House
London, W. 1

First reprinting, 1963, Johnson Reprint Corporation

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 8 (1944), 3–48 Série mathématique

В. Л. ГОНЧАРОВ

ИЗ ОБЛАСТИ КОМБИНАТОРИКИ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В статье собраны некоторые результаты, относящиеся к двум различным вопросам: в первой части рассматривается чередование событий в ряде независимых опытов, отвечающем схеме Бернулли, а во второй — распределение циклов в перестановках *.

Обе затронутые темы трактованы на основе одного и того же метода, который ни в какой степени не претендует на новизну, но в данном случае его применение, как представляется автору, оказывается особенно естественным и выразительным: это — метод производящих функций.

1

1. Предположим, что производится ряд из n опытов, перенумерованных натуральными числами, причем в каждом опыте может появиться или не появиться некоторое событие A; противоположное событие, заключающееся в непоявлении A, обозначим через B. Пусть в любом из опытов вероятность появления A равна p, вероятность появления B равна q $(p+q=1;\ 0<p,\ q<1)$.

Если событие A появляется в опытах с номерами $m+1, m+2, \ldots, m+r$ и вместе с тем не появляется в опытах с номерами m и $m+r+1$, то мы скажем, что перед нами имеется серия появлений события A, состоящая из r членов, или, короче, r-членная A-серия. При этом предполагается, что $m \geqslant 0$, $r \geqslant 1$; условие, касающееся m-го опыта, отпадает, если $m=0$; условие, касающееся $(m+r+1)$-го опыта, отпадает, если $(m+r)$-й опыт — последний из числа произведенных. Аналогично определяются s-членные B-серии.

Считая общее число опытов n фиксированным, обозначим, далее, через α_r число r-членных A-серий в рассматриваемом ряде опытов; через β_s — число s-членных B-серий. Очевидно, $0 \leqslant \alpha_r \leqslant \frac{n}{r}$, $0 \leqslant \beta_s \leqslant \frac{n}{s}$; $\sum\limits_r \alpha_r$ есть общее число A-серий, $\sum\limits_s \beta_s$ — общее число B-серий; кроме того, обязательно

$$\sum_r r\alpha_r + \sum_s s\beta_s = n \quad (K_n). \tag{1}$$

Например, в следующем ряде опытов, результаты которых отмечены последовательно буквами

$$ABBBAABAAAABABAABABB,$$

* Соответствующие заметки были опубликованы в Докладах Академии Наук, XXXV (1942), № 2, 299–301; XXXVII (1943), № 9, 295–297.

мы имеем:

$$n = 20,$$
$$\alpha_1 = 3,\ \alpha_2 = 2,\ \alpha_3 = 0,\ \alpha_4 = 1,\ \alpha_5 = \ldots = \alpha_{20} = 0,$$
$$\beta_1 = 4,\ \beta_2 = 1,\ \beta_3 = 1,\ \beta_4 = \ldots = \beta_{20} = 0.$$

Пусть $p_{\substack{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \\ \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n}}$ (или, короче, $p_{\substack{\alpha \\ \beta}}$) — вероятность того, что в данном ряде опытов имеется α_r r-членных A-серий и β_s s-членных B-серий, где как r, так и s, пробегают все значения от 1 до n. Если n не будем считать заранее фиксированным, то α_r и β_s могут принимать любые целые неотрицательные значения; притом, если общее число опытов все же конечно (как мы и будем предполагать в дальнейшем), то вместо $p_{\substack{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \\ \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n}}$ условимся писать $p_{\substack{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \\ \beta_1 \beta_2 \ldots}}$, имея в виду, что при достаточно больших значках α_r и β_s равны нулю, а n определяется по формуле (1). В дальнейшем будет удобно не исключать из рассмотрения также и случай $n = 0$, когда никаких опытов не производится: в этом случае необходимо положить формально

$$p_{\substack{\alpha \\ \beta}} = p_{\substack{0,\,0,\,\ldots \\ 0,\,0,\,\ldots}} = 1.$$

2. Вычислим *вероятность* $p_{\substack{\alpha \\ \beta}}$. Заметим, прежде всего, что число A-серий и число B-серий могут отличаться одно от другого не более чем на единицу, поэтому $p_{\substack{\alpha \\ \beta}} = 0$ при условии

$$\left| \sum_r \alpha_r - \sum_s \beta_s \right| \geqslant 2. \qquad (2)$$

Допустим, что

$$\sum_r \alpha_r + \sum_s \beta_s = \pm 1.$$

Вероятность любой комбинации результатов в нашем ряде опытов, раз известно, что появится α_r r-членных A-серий и β_s s-членных B-серий, и принимая во внимание независимость опытов, очевидно, равна $p^{\sum_r r\alpha_r} q^{\sum_s s\beta_s}$; остается сосчитать число таких комбинаций. Предположим сначала, что все числа α_r и β_s не превосходят единицы; тогда, исходя из некоторой определенной комбинации (например, такой, где числа членов в последовательно встречающихся A-сериях идут не возрастая, и то же — для B-серий), можно получить *все* нужные нам комбинации, если переставим между собою всеми возможными способами все A-серии, и то же сделаем для B-серий; таким образом, для рассматриваемого частного случая число комбинаций равно $(\sum_r \alpha_r)!\ (\sum_s \beta_s)!$ Откажемся теперь от ограничения $\alpha_r,\ \beta_s \leqslant 1$; тогда предыдущий результат будет ошибочным по той причине, что перестановки между собою r-членных A-серий не меняют самой комбинации, и потому каждая комбинация окажется считанной $\alpha_r!$ раз (то же для B-серий); чтобы исправить подсчет, придется разделить на произведение $\alpha_1!\ \alpha_2! \ldots \beta_1!\ \beta_2! \ldots$

Итак, в общем случае при условии (2) число искомых комбинаций будет

$$\frac{(\sum_r \alpha_r)!\,(\sum_s \beta_s)!}{\prod_r (\alpha_r!)\ \prod_s (\beta_s!)}$$

Если допустим теперь, что

$$\sum_r \alpha_r - \sum \beta_s = 0,$$

то в предшествующее рассуждение придется внести еще ту поправку, что все A-серии в своей совокупности могут быть переставлены со всеми B-сериями в их совокупности. Это удвоит число искомых комбинаций.

В итоге мы получаем следующее значение для $p_{\alpha \atop \beta}$:

$$p_{\alpha \atop \beta} = \varepsilon \frac{(\sum_r \alpha_r)!\,(\sum_s \beta_s)!}{\prod_r (\alpha_r!)\ \prod_s (\beta_s!)} p^{\Sigma_r \alpha_r} q^{\Sigma_s \beta_s}, \tag{3}$$

где

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 \text{ при } \left|\sum_r \alpha_r - \sum_s \beta_s\right| = 1, \\ 2 \text{ при } \sum_r \alpha_r = \sum_s \beta_s \neq 0, \\ 1 \text{ при } \sum_r \alpha_r = \sum_s \beta_s = 0, \\ 0 \text{ при } \left|\sum_r \alpha_r - \sum_s \beta_s\right| \geqslant 2. \end{cases}$$

3. Рассмотрим *основную производящую функцию*

$$F\binom{x_1, x_2, \ldots}{y_1, y_2, \ldots} = \sum p_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \atop \beta_1 \beta_2 \ldots} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \ldots, \tag{4}$$

причем суммирование производится по значкам α_r и β_s и не подчинено никаким ограничениям, если не считать того, что в последовательностях $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots$, начиная с некоторого момента, идут одни нули. Функция $F\binom{x_1, x_2 \ldots}{y_1, y_2 \ldots}$ зависит от двух бесконечных рядов переменных x_r и y_s. Сходимость ряда, стоящего в правой части (4), нас мало интересует; заметим, однако, что ряд сходится при достаточно малых значениях x_r и y_s; это вытекает из дальнейших преобразований, которым ряд будет подвергнут, и вместе с тем обусловливает их законность. Формулу (4) более сокращенно можно записать в виде

$$F\binom{x_r}{y_s} = \sum p_{\alpha \atop \beta} x^\alpha y^\beta. \tag{5}$$

Общий член рассматриваемого ряда, принимая во внимание полученные выше [формула (3)] значения вероятностей $p_{\alpha \atop \beta}$,

$$p_{\alpha \atop \beta} x^\alpha y^\beta = \varepsilon \frac{(\sum_r \alpha_r)!\,(\sum_s \beta_s)!}{\prod_r (\alpha_r!)\ \prod_s (\beta_s!)} \cdot \prod_r (p^r x_r)^{\alpha_r} \cdot \prod_s (q^s y_s)^{\beta_s} =$$

$$= \varepsilon \frac{(\sum \alpha_r)!}{\prod_r (\alpha_r!)} \cdot \prod_r (p^r x_r)^{\alpha_r} \cdot \frac{(\sum \beta_s)!}{\prod_s (\beta_s!)} \cdot \prod_s (q^s y_s)^{\beta_s}. \tag{6}$$

Расклассифицируем члены ряда по четырем группам: к первой группе отнесем единственный член, соответствующий значениям $\alpha_r = \beta_s = 0$ $(r, s \geqslant 1)$ (этот член равен единице); ко второй группе отнесем совокупность членов ряда, для которых $\sum_r \alpha_r - \sum_s \beta_s = 1$ и для которых, следовательно, выполняется одно из условий

$$\sum_s \beta_s = \nu, \qquad \sum_r \alpha_r = \nu + 1 \quad (A_\nu) \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots);$$

к третьей группе отнесем совокупность тех членов ряда, для которых $\sum_r \alpha_r - \sum_s \beta_s = -1$, так что выполняется одно из условий

$$\sum_r \alpha_r = \nu, \qquad \sum_s \beta_s = \nu + 1 \quad (B_\nu) \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots);$$

наконец, к четвертой группе отнесем те члены ряда, для которых $\sum_r \alpha_r = \sum_s \beta_s \neq 0$ и, значит, выполняется одно из условий

$$\sum_r \alpha_r = \nu, \qquad \sum_s \beta_s = \nu \quad (C_\nu) \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Таким образом, оказывается, что

$$F\binom{x_r}{y_s} = 1 + \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{(A_\nu)} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{(B_\nu)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{(C_\nu)} p_{\alpha \atop \beta} x^\alpha y^\beta \right). \tag{7}$$

Принимая во внимание тождество

$$\left(\sum_t Z_t\right)^\nu = \sum \frac{(\sum_t \gamma_t)!}{\prod_t (\gamma_t!)} \prod_t Z_t^{\gamma_t}$$

(где сумма справа подчинена условию $\sum_t \gamma_t = \nu$); убеждаемся с помощью формулы (6), что

$$\sum_{(A_\nu)} p_{\alpha \atop \beta} x^\alpha y^\beta = P^{\nu+1} Q^\nu,$$

причем ради краткости положено:

$$P = \sum_r p^r x_r, \quad Q = \sum_s q^s y_s.$$

Точно так же

$$\sum_{(B_\nu)} p_{\alpha \atop \beta} x^\alpha y^\beta = P^\nu Q^{\nu+1}$$

и

$$\sum_{(C_\nu)} p_{\alpha \atop \beta} x^\alpha y^\beta = 2 P^\nu Q^\nu.$$

В таком случае правая часть формулы (7) принимает вид:

$$1 + \sum_{\nu=0}^{\infty} P^{\nu+1} Q^\nu + \sum_{\nu=0}^{\infty} P^\nu Q^{\nu+1} + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} P^\nu Q^\nu =$$

$$= 1 + \frac{P}{1-PQ} + \frac{Q}{1-PQ} + \frac{2PQ}{1-PQ} = \frac{(1+P)(1+Q)}{1-PQ},$$

откуда, после подстановки значений P и Q, находим

$$F\binom{x_r}{y_s}=\frac{(1+\sum\limits_r p^r x_r)(1+\sum\limits_s q^s y_s)}{1-\sum\limits_r p^r x_r\cdot\sum\limits_s q^s y_s}. \tag{8}$$

Теперь видно, что встретившиеся нам ряды сходятся абсолютно и равномерно (чем и оправдываются выполненные преобразования) например, при ограничительных условиях

$$|x_r|\leqslant\xi^r,\quad |y_s|\leqslant\eta^s, \tag{9}$$

где числа ξ и η удовлетворяют неравенствам $\xi, \eta>0$, $p\xi+q\eta<1$; в самом деле, при этих условиях

$$|P|\leqslant\sum_r(p\xi)^r=\frac{p\xi}{1-p\xi},\quad |Q|\leqslant\sum_s(q\eta)^s=\frac{q\eta}{1-q\eta},$$

$$|PQ|\leqslant\frac{pq\xi\eta}{(1-p\xi)(1-q\eta)}.$$

Формула (8) дает аналитическое продолжение функции $F\begin{pmatrix}x_r\\y_s\end{pmatrix}$, которое было задано тейлоровым разложением (4) в окрестности точки $x_r=y_s=0$, наверное сходящимся в области, определяемой сопряженными радиусами сходимости.

4. Из суммы, стоящей справа в формуле (4), легко выделить совокупность всех тех членов, для которых выполняется условие (K_n): только эти члены играют роль, когда речь идет о ряде n опытов. Обозначая сумму этих членов $\sum\limits_{(K_n)} p_{\substack{\alpha\\ \beta}}\, x^\alpha y^\beta$ через $F_n\begin{pmatrix}x_r\\y_s\end{pmatrix}$, получаем тождество

$$F\begin{pmatrix}x_r\\y_s\end{pmatrix}=\sum_{n=0}^{\infty}F_n\begin{pmatrix}x_r\\y_s\end{pmatrix}$$

Если в основной производящей функции заменим x_r через $t^r x_r$, y_s через $t^s y_s$, то показатель при t в общем члене окажется равным $\sum\limits_r r\alpha_r+\sum s\beta_s$, и заставляя его пробегать все целые неотрицательные значения, мы будем иметь

$$\Phi\left(t;\begin{matrix}x_r\\y_s\end{matrix}\right)\equiv F\begin{pmatrix}t^r x_r\\t^s y_s\end{pmatrix}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n\sum_{(K_n)}p_{\substack{\alpha\\ \beta}}\, x^\alpha y^\beta=\sum_{n=0}^{\infty}t^n F_n\begin{pmatrix}x_r\\y_s\end{pmatrix}. \tag{10}$$

Отсюда ясно, что $F_n\begin{pmatrix}x_r\\y_s\end{pmatrix}$ есть не что иное, как коэффициент при t^n в разложении функции $\Phi\left(t;\begin{matrix}x_r\\y_s\end{matrix}\right)$ по степеням t.

Обращаясь к формуле (8), мы получаем

$$\Phi\left(t;\begin{matrix}x_r\\y_s\end{matrix}\right)=\frac{(1+\sum\limits_r p^r t^r x_r)\,(1+\sum\limits_s q^s t^s y_s)}{1-\sum\limits_r p^r t^r x_r\cdot\sum\limits_s q^s t^s y_s}. \tag{11}$$

Излишне искать формулу для $F_n\begin{pmatrix}x_r\\y_s\end{pmatrix}$; заметим лишь, что

$$\Phi\left(t;\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right)=\frac{(1+\sum\limits_r p^r t^r)\,(1+\sum\limits_s q^s t^s)}{1-\sum\limits_r p^r t^r\cdot\sum\limits_s q^s t^s}=\frac{\frac{1}{1-pt}\cdot\frac{1}{1-qt}}{1-\frac{pt}{1-pt}\cdot\frac{qt}{1-qt}}=\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n.$$

С другой стороны, согласно формуле (10),

$$\Phi\left(t;\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}t^n F_n\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Из сопоставления двух последних тождеств вытекает, что

$$F_n\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\equiv\sum_{(K_n)}p_{\alpha\atop\beta}=1\qquad(n=0,1,2,\ldots),$$

как и следовало ожидать, так как все возможные комбинации из α_r r-членных A-серий и β_s s-членных B-серий $(r, s=0, 1, 2, \ldots, n)$ в ряде n опытов образуют систему единственно возможных и несовместных событий.

5. Желая исследовать *число* $M^{(n)}(A)$ *A-серий* в ряде n опытов, введем обозначение $p_m^{(n)}(A)$ для вероятности того, что в ряде n опытов окажется ровно m A-серий. Легко убедиться в том, что

$$p_m^{(n)}=\sum_{(K_n,\,L_m)}p_{\alpha\atop\beta},$$

где значки K_n и L_m указывают, что суммирование по двойному ряду индексов α_r и β_s подчинено ограничениям

$$\sum_r r\alpha_r+\sum_s s\beta_s=n\qquad(K_n)$$

$$\sum_r\alpha_r=m\qquad(L_m)$$

Введем также новую производящую функцию

$$\psi(A;\,t,\,x)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}p_m^{(n)}(A)\,t^n x^m\tag{12}$$

и посмотрим, как она может быть получена из основной производящей функции $F\begin{pmatrix}x_r\\y_s\end{pmatrix}$. Если заменим в функции $F\begin{pmatrix}x_r\\y_s\end{pmatrix}$ x_r через $t^r x$, а y_s через t^s, то получим тождество

$$F\begin{pmatrix}t^r x\\t^s\end{pmatrix}=\sum p_{\alpha\atop\beta}t^{\sum\limits_r r\alpha_r+\sum\limits_s s\beta_s}x^{\Sigma\alpha_r}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{(K_n,\,L_m)}p_{\alpha\atop\beta}\right\}t^n x^m=\psi(A;\,t,\,x).$$

Выполняя указанную подстановку в правой части формулы (8), убеждаемся, что

$$F\begin{pmatrix}t^r x\\t^s\end{pmatrix}=\frac{(1+\sum\limits_r p^r t^r x)\;(1+\sum\limits_s q^s t^s)}{1-\sum\limits_r p^r t^r x\cdot\sum\limits_s q^s t^s}=\frac{\left(1+\frac{ptx}{1-pt}\right)\left(1+\frac{qt}{1-qt}\right)}{1-\frac{ptx}{1-pt}\cdot\frac{qt}{1-qt}}=$$

$$=\frac{1-(1-x)\,pt}{1-t+(1-x)\,pqt^2}.$$

Таким образом,

$$\psi(A;\ t,\ x)=\frac{1-(1-x)\,pt}{1-t+(1-x)\,pqt^2}\ . \qquad (13)$$

Положим теперь

$$\psi(A;\ t,\ x)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(A;\ x)\,t^n,\quad P_n(A;\ x)=\sum_{m=0}^{\infty}p_m^{(n)}(A)\,x^m. \qquad (14)$$

Чтобы разложить функцию $\psi(A;\ t,\ x)$ по степеням t, представим ее сначала разложенной на элементарные дроби:

$$\psi(A;\ t,\ x)=\frac{R_1}{t_1-t}+\frac{R_2}{t_2-t}\ ,$$

где

$$t_1\equiv t_1(x)=\frac{2}{1+U(x)}\ ,\quad t_2\equiv t_2(x)=\frac{2}{1-U(x)},\quad U(x)=\sqrt{(q-p)^2+4pqx},$$

$$R_{1,2}\equiv R_{1,2}\ (x)=\frac{1-(1-x)\,pt_{1,\,2}}{1-2\,(1-x)\,pqt_{1,\,2}}\ ,$$

так что

$$R_1=\frac{(q-p)+2px+U(x)}{-U(x)\,(1-U(x))}\ ,\quad R_2=\frac{(q-p)+2px-U(x)}{U(x)\,(1+U(x))}\ .$$

Из первой формулы (14) следует, что

$$P_n(A;\ x)=\frac{1}{n!}\,\frac{\partial^n}{\partial t^n}\,\psi(A;\ t,\ x)\Big|_{t=0}=\frac{R_1}{t_1^{n+1}}+\frac{R_2}{t_2^{n+1}}=$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}}\left\{\frac{(q-p)+2px+U(x)}{U(x)}\,(1+U(x))^n-\frac{(q-p)+2px-U(x)}{U(x)}\,(1-U(x))^n\right\}=$$

$$=\frac{1}{2^n}\left\{[(q-p)+2px]\,\frac{(1+U(x))^n-(1-U(x))^n}{2U(x)}+\frac{(1+U(x))^n+(1-U(x))^n}{2}\right\}. \qquad (15)$$

Отсюда ясно (как и нужно было ожидать), что функция $P_n(A;\ x)$ представляет собою многочлен степени $\frac{n}{2}$ в случае n четного или $\frac{n+1}{2}$ в случае n нечетного. При $p=q=\frac{1}{2}$ формула (14) упрощается и принимает вид:

$$P_n(A;\ x)=\frac{1}{2^{n+1}}\{(1+\sqrt{x})^{n+1}+(1-\sqrt{x})^{n+1}\}$$

При $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ для многочленов $P_n(A;\ x)$, после введения однородности, получаются выражения:

$$P_0(A;x)=1,\quad P_1(A;x)=q+px,\quad P_2(A;x)=q^2+p\,(p+2q)\,x,\ \ldots$$

Вычисление многочленов $P_n(A;\ x)$ удобно производить по рекуррентной формуле

$$P_n(A;x)=(p+q)\,P_{n-1}(A;x)-pq\,(1-x)\,P_{n-2}(A;x)\quad (n\geqslant 2).$$

Собирая коэффициенты при x^n в формуле (14), мы можем получить явное выражение для вероятности $p_m^n(A)$:

$$p_m^{(n)}(A) =$$

$$= \begin{cases} q^n \quad (m=0) \\ \frac{p}{2^{n-1}} (4pq)^{m-1} \left\{ C_n^{2m-1} + [2(q-p)+1] \sum_{\nu=m}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{2\nu+1} C_\nu^m (q-p)^{2(\nu-m)+1} + \right. \\ \left. \quad + 2q \sum_{\nu=m}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2\nu} C_\nu^m (q-p)^{2(\nu-m)} \right\} \quad \left(1 \leqslant m \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]\right) \end{cases}$$

При $p=q$ эта формула упрощается:

$$p_m^{(n)}(A) = \frac{1}{2^n} \cdot C_{n+1}^{2m} \quad \left(0 \leqslant m \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]\right).$$

Математическое ожидание $\sigma_n(A)$ числа A-серий в n опытах и дисперсия $E_n(A)$ (среднее квадратическое отклонение) *той же величины* определяются по формулам

$$\sigma_n(A) = \sum_{m=0}^{n} m p_m^{(n)}(A), \quad E_n^2(A) = \sum_{m=0}^{n} (m - \sigma_n(A))^2 p_m^{(n)}(A).$$

Для вычисления $\sigma_n(A)$ и $E_n(A)$ дифференцируем дважды производящую функцию $\psi(A;\ t,\ x)$ по x:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(A;\ t,\ x) = \frac{pt(1-pt)}{[1-t+(1-x)pqt^2]^2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(A;\ x)\, t^n,$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(A;\ t,\ x) = \frac{2p^2qt^3(1-pt)}{[1-t+(1-x)pqt^2]^3} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n''(A;\ x)\, t^n$$

и затем положим $x=1$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n'(A;\ 1)\, t^n = \frac{pt(1-pt)}{(1-t)^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n''(A;\ 1)\, t^n = \frac{2p^2qt^3(1-pt)}{(1-t)^3}.$$

Сравним в последних тождествах коэффициенты при t^n:

$$P_n'(A;1) = p[n-(n-1)p] = p(nq+p) \quad (n \geqslant 1)$$

$$P_n''(A;1) = p^2q[(n-1)(n-2)-(n-2)(n-3)p] =$$
$$= (n-2)p^2q[2p+(n-1)q] \quad (n \geqslant 2).$$

С другой стороны, очевидно, что

$$\sigma_n(A) = \sum_{m=0}^{n} m p_m^{(n)}(A) = P_n'(A;1),$$

$$E_n^2(A) = \sum_{m=0}^{n} m^2 p_m^{(n)}(A) - \sigma_n^2(A) = \sum_{m=0}^{n} m(m-1) p_m^{(n)}(A) + \sigma_n(A) + \sigma_n^2(A) =$$
$$= P_n''(A;1) + P_n'(A;1) - P_n'^2(A;1).$$

Подставляя сюда найденные выше значения $P_n'(A;1)$ и $P_n''(A;1)$, находим

$$\sigma_n(A) = p(nq+p) \sim pqn, \tag{16}$$

$$E_n(A) = \sqrt{pq[(n-2)p^2-(n-3)pq+nq^2]} \sim \sqrt{pq(p^2-pq+q^2)}\cdot\sqrt{n}. \tag{17}$$

В частности, при $p = q = \frac{1}{2}$

$$\sigma_n(A) = \frac{1}{4}(n+1) \sim \frac{n}{4}, \tag{18}$$

$$E_n(A) = \frac{1}{4}\sqrt{n+1} \sim \frac{\sqrt{n}}{4}. \tag{19}$$

Асимптотическое (при $n \to \infty$) значение $\frac{\sigma_n(A)}{n}$ оказывается максимальным, если $p = q$; в этом случае оно равно $\frac{1}{4}$. То же самое можно сказать и об асимптотическом значении $\frac{E_n(A)}{\sqrt{n}}$.

Если обозначим через $\sigma_n(B)$ математическое ожидание числа B-серий в опытах, то, по симметрии, получим формулу

$$\sigma_n(B) = q(np+q) \sim pqn$$

(аналогично и для дисперсии числа B-серий). Любопытно отметить, что $\sigma_n(A)$ и $\sigma_n(B)$, вообще говоря, различны, но при $n \to \infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$\sigma_n(A) \sim \sigma_n(B),$$

каково бы ни было p. Подобное замечание относится и к дисперсиям.

6. Обозначим через $M^{(n)}(A)$ * число A-серий в n опытах. Для определения предельного закона распределения этой случайной величины составим характеристическую функцию $\Phi_n(t)$ нормированной величины $\frac{M^{(n)}-\sigma_n}{E_n\sqrt{2}}$ и затем посмотрим, каков будет ее предел при $n \to \infty$. Функция $\Phi_n(t)$ определяется равенством

$$\Phi_n(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\,dF_n(x),$$

где $F(x)$ — закон распределения величины $\frac{M^{(n)}-\sigma_n}{E_n\sqrt{2}}$, и так как эта функция ступенчатая, со скачками $p_m^{(n)}$ в точках $x = \frac{m-\sigma_n}{E_n\sqrt{2}}$, то

$$\Phi_n(t) = \sum_{m=0}^{n} p_m^{(n)} e^{it\frac{m-\sigma_n}{E_n\sqrt{2}}} = e^{-\frac{it\sigma_n}{E_n\sqrt{2}}} \sum_{m=0}^{n} p_m^{(n)} e^{it\frac{m}{E_n\sqrt{2}}} = e^{-\frac{it\sigma_n}{E_n\sqrt{2}}} P_n\left(e^{\frac{it}{E_n\sqrt{2}}}\right).$$

Подставляя в эту формулу выражение для $P_n(x)$, найденное выше [формула (14)], а также значения σ_n и E_n, взятые из формул (16) и

* В дальнейшем опущен значок A при $M^{(n)}$, $\sigma^{(n)}$, $E^{(n)}$, $p_m^{(n)}$ и $P_n(x)$.

(17), получим при n, стремящемся к бесконечности, равномерно относительно всех значений t из любого конечного промежутка:

$$U\left(e^{\frac{it}{E_n\sqrt{2}}}\right) = \sqrt{(q-p)^2 + 4pqe^{\frac{it}{E_n\sqrt{2}}}} = \sqrt{1 + \frac{4pqit}{E_n\sqrt{2}} - \frac{pqt^2}{E_n^2} + o\left(\frac{1}{E_n^2}\right)} =$$

$$= 1 + \frac{pqit}{E_n}\sqrt{2} - pq\left(\frac{1}{2} - pq\right)\frac{t^2}{E_n^2} + o\left(\frac{1}{E_n^2}\right),$$

$$\frac{1 + U\left(e^{\frac{it}{E_n\sqrt{2}}}\right)}{2} = 1 + \frac{pqit}{E_n\sqrt{2}} - \frac{1}{2}pq\left(\frac{1}{2} - pq\right)\frac{t^2}{E_n^2} + o\left(\frac{1}{E_n^2}\right).$$

$$\left(\frac{1 + U\left(e^{\frac{it}{E_n\sqrt{2}}}\right)}{2}\right)^n = e^{\frac{ipqt}{\sqrt{2}}\frac{n}{E_n} - \frac{1}{4}pq(1-3pq)t^2\frac{n}{E_n^2} + o\left(\frac{n}{E_n^2}\right)} =$$

$$= e^{\sqrt{\frac{pq}{2(1-3pq)}}\,it\sqrt{n} - \frac{1}{4}t^2 + o(1)},$$

$$\frac{1 - U\left(e^{\frac{it}{E_n\sqrt{2}}}\right)}{2} = o(1), \qquad \left(\frac{1 - U\left(e^{\frac{it}{E_n\sqrt{2}}}\right)}{2}\right)^n = o(1)$$

и, наконец,

$$\Phi_n(t) = e^{-\frac{it\sigma_n}{E_n\sqrt{2}}} P_n\left(e^{\frac{it}{E_n\sqrt{2}}}\right) \sim e^{-it\sqrt{\frac{pq}{2(1-3pq)}}\sqrt{n} + o(1)}.$$

$$\cdot e^{it\sqrt{\frac{pq}{2(1-3pq)}}\sqrt{n} - \frac{1}{4}t^2 + o(1)} \longrightarrow e^{-\frac{t^2}{4}},$$

откуда ясно, что интересующий нас предельный закон — гауссов.

Другими словами, каковы бы ни были числа t' и t'' $(-\infty \leqslant t' < t'' \leqslant +\infty)$, справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \text{Вер}\,\{\sigma_n + t'E_n\sqrt{2} < M^{(n)} < \sigma_n + t''E_n\sqrt{2}\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t'}^{t''} e^{-t^2}\,dt.$$

7. Рассмотрим теперь *число A-серий и B-серий* (суммарно) в n опытах. Вероятность того, что это число окажется равным m, выражается суммой $\sum_{(K_n, L'_m)} p_{\alpha\beta}$ с ограничениями

$$\sum_r r\alpha_r + \sum_s s\beta_s = n \quad (K_n) \text{ и } \sum_r \alpha_r + \sum_s \beta_s = m \quad (L'_m).$$

Производящая функция

$$\psi(t, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} p_m^{(n)} t^n x^m$$

на этот раз получается из основной функции посредством замены x_r на

$t^r x$, y_s на $t^s x$:

$$\psi(t,x)=F\binom{t^r x}{t^s x}=\frac{\left(1+\sum\limits_r p^r t^r x\right)\left(1+\sum\limits_s q^s t^s x\right)}{1-\sum\limits_r p^r t^r x\cdot\sum\limits_s q^s t^s x}=$$

$$=\frac{\left(1+\frac{ptx}{1-pt}\right)\left(1+\frac{qtx}{1-qt}\right)}{1-\frac{ptx}{1-pt}\cdot\frac{qtx}{1-qt}}=\frac{1-t(1-x)+pqt^2(1-x)^2}{1-t+pqt^2(1-x^2)}. \qquad (20)$$

Положим, как и раньше,

$$\psi(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\,t^n;$$

исключение целой части и разложение на элементарные дроби (относительно переменной t) дает

$$\psi(t,x)=\frac{1-x}{1+x}+\frac{x}{1+x}\left(\frac{R_1}{t_1-t}+\frac{R_2}{t_2-t}\right)=\frac{1-x}{1+x}+\frac{x}{1+x}\,\frac{(x-1)t+2}{1-t+pqt^2(1-x^2)},$$

где

$$t_1=\frac{2}{1+U(x)},\quad t_2=\frac{2}{1-U(x)},\quad U(x)=\sqrt{(p-q)^2+4pqx^2},$$

$$R_1=2\frac{x+U(x)}{U(x)(1+U(x))},\qquad R_2=-2\frac{x-U(x)}{U(x)(1-U(x))}.$$

Таким образом,

$$P_0(x)=1,$$

$$\left.\begin{aligned}P_n(x)&=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial t^n}\psi(t,x)\Big|_{t=0}=\frac{x}{1+x}\left(\frac{R_1}{t_1^{n+1}}+\frac{R_2}{t_2^{n+1}}\right)=\\&=\frac{x^2}{1+x}\left\{\frac{1}{U(x)}\left[\left(\frac{1+U(x)}{2}\right)^n-\left(\frac{1-U(x)}{2}\right)^n\right]+\right.\\&\left.+\left[\left(\frac{1+U(x)}{2}\right)^n+\left(\frac{1-U(x)}{2}\right)^n\right]\right\}.\end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Продифференцируем $\psi(t,x)$ дважды по x:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(t,x)=\frac{t-[1+2pq(1-2x)]t^2+pq(1-x)(3-x)t^3-2p^2q^2(1-x)^2t^4}{[1-t+pqt^2(1-x^2)]^2},$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(t,x)=2pq\left\{\frac{2t^2+(3x-4)t^3+[6pqx^2-3(2pq+1)x+2(1+2pq)]t^4}{[1-t+pqt^2(1-x^2)]^3}+\right.$$

$$\left.+\frac{pq(x-1)^2(2-x)t^5+2p^2q^2(1-x)^2(1+3x)t^6}{[1-t+pqt^2(1-x^2)]^3}\right\}.$$

Затем положим $x=1$ и разложим по степеням t:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(t,1)=\frac{t-(1-2pq)t^2}{(1-t)^2}=\frac{2pq}{(1-t)^2}+\frac{1-4pq}{1-t}-(1-2pq)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}[2npq+(p^2+q^2)]t^n,$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(t,1)=2pq\,\frac{2t^2-t^3+(4pq-1)t^4}{(1-t)^3}=$$

$$=2pq\left\{\frac{4pq}{(1-t)^3}-\frac{16pq-3}{(1-t)^2}+\frac{24pq-7}{1-t}-(16pq-5)+(4pq-1)(1-t)\right\}=$$

$$=2pq\sum_{n=2}^{\infty}[2pqn^2-(10pq-3)n+4(3pq-1)]t^n.$$

Отсюда следует:

$$P_0'(1)=0, \qquad P_n'(1)=2npq+(p^2+q^2) \quad (n\geqslant 1),$$
$$P_0''(1)=P_1''(1)=0,\ P_n''(1)=2pq\,[2pqn^2-(10pq-3)\,n+4\,(3pq-1)] \ (n\geqslant 2),$$

так что, вводя в рассмотрение математическое ожидание σ_n и дисперсию E_n, получим, при $n\geqslant 1$,

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_0=0, \quad \sigma_n=2npq+(p^2+q^2),\\ &\sigma_n(A)+\sigma_n(B)=\sigma_n;\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

с другой стороны, при $n\geqslant 2$

$$\left.\begin{aligned}E_n^2&=P_n''(1)+\sigma_n(1-\sigma_n)=\\ &=2pq\,[2pqn^2-(10pq-3)\,n+4\,(3pq-1)]-\\ &\quad-[2npq+(1-2pq)]\cdot 2\,(n-1)\,pq=\\ &\quad=2pq\,[2\,(1-3pq)\,n+(10pq-3)],\\ E_n&=\sqrt{2pq\,[2\,(1-3pq)\,n+(10pq-3)]}=\\ &=\sqrt{2pq\,[2\,(p^2-pq+q^2)\,n-(3p^2-4pq+3q^2)]}\sim\\ &\sim 2\sqrt{pq\,(p^2-pq+q^2)}\,\sqrt{n},\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

тогда как

$$E_0=0, \quad E_1=\sigma_1(1-\sigma_1)=0.$$

Характеристическая функция нормированной случайной величины $\dfrac{M^{(n)}-\sigma_n}{E_n\sqrt{2}}$, где $M^{(n)}$ — число A-серий и B-серий в n опытах, имеет вид

$$\Phi_n(t)=e^{-\frac{it\sigma_n}{E_n\sqrt{2}}}P_n\left(e^{\frac{it}{E_n\sqrt{2}}}\right),$$

причем $P_n(x)$, σ_n и E_n определяются теперь формулами (21), (22) и (23). На этот раз

$$U\left(e^{\frac{it}{E_n\sqrt{2}}}\right)=1+2\frac{pqit\sqrt{2}}{E_n}-2pq\,(1-2pq)\,\frac{t^2}{E_n^2}+o\left(\frac{1}{E_n^2}\right),$$

$$\frac{1+U\left(e^{\frac{it}{E_n\sqrt{2}}}\right)}{2}=1+\frac{pqit\sqrt{2}}{E_n}-pq\,(1-2pq)\,\frac{t^2}{E_n^2}+o\left(\frac{1}{E_n^2}\right),$$

$$\left(\frac{1+U^{\frac{it}{E_n\sqrt{2}}}}{2}\right)^n=e^{itpq\sqrt{2}\cdot\frac{n}{E_n}-pq\,(1-3pq)\,t^2\cdot\frac{n}{E_n^2}+o\left(\frac{n}{E_n^2}\right)}=e^{\frac{it}{\sqrt{2\,(1-3pq)}}\sqrt{n}-\frac{t^2}{4}+o(1)},$$

и потому

$$\Phi_n(t)=e^{-it\sqrt{\frac{pq}{2\,(1-3pq)}}\cdot\sqrt{n}+o(1)}\cdot e^{it\sqrt{\frac{pq}{2\,(1-3pq)}}\cdot\sqrt{n}-\frac{t^2}{4}+o(1)}\to e^{-\frac{t^2}{4}},$$

так что предельный закон распределения снова — гауссов.

8. Рассмотрим теперь *число r-членных A-серий в n опытах*; обозначим его через $M^{(n)}(A;r)$. Вероятность $p_m^{(n)}(A;r)$ того, что всего появится m r-членных A-серий, равна сумме $\sum\limits_{(\varkappa_m(r),\ L_n)} p_\beta^\alpha$, взятой с ограничениями

$$\alpha_r=m \quad (\varkappa_m(r)) \ \text{и} \ \sum_r r\alpha_r+\sum_s s\beta_s=n \quad (L_n).$$

Нетрудно проверить, что соответствующая производящая функция

$$\psi(A;\ r;\ t,\ x) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} p_m^{(n)}(A;\ r)\, t^n x^m$$

может быть получена из основной функции $F\begin{pmatrix} x_i \\ y_k \end{pmatrix}$ посредством замены всех аргументов y_k через t^k и всех аргументов x_i через t^i, кроме аргумента x_r, который заменяется через $t^r x$:

$$\psi(A;\ r;\ t,\ x) = F\begin{pmatrix} t,\ t^2,\ \ldots,\ t^{r-1},\ t^r x,\ t^{r+1},\ \ldots \\ t,\ t^2,\ \ldots,\ t^{r-1},\ t^r\ ,\ t^{r+1},\ \ldots \end{pmatrix}.$$

В самом деле,

$$F\begin{pmatrix} t,\ t^2,\ \ldots,\ t^{r-1},\ t^r x,\ t^{r+1},\ \ldots \\ t,\ t^2,\ \ldots,\ t^{r-1},\ t^r\ ,\ t^{r+1},\ \ldots \end{pmatrix} = \sum p_{\substack{\alpha \\ \beta}}\ t^{\sum\limits_r r\alpha_r + \sum\limits_s s\beta_s} x^{\alpha_r + \beta_r} =$$

$$= \sum_{m,n} \Bigl(\sum_{(\alpha_m(r),\ Ln)} p_{\substack{\alpha \\ \beta}} \Bigr) t^n x^m = \psi(A;\ r;\ t,\ x).$$

Выполняя построение $\psi(A;\ r;\ t,\ x)$, получаем

$$\psi(A;\ r;\ t,\ x) = \frac{\Bigl[1 + \sum\limits_{i=1}^{\infty} p^i t^i - p^r t^r (1-x)\Bigr]\Bigl(1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k t^k\Bigr)}{1 - \Bigl[\sum\limits_{i=1}^{\infty} p^i t^i - p^r t^r (1-x)\Bigr] \cdot \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k t^k} =$$

$$= \frac{\Bigl[\frac{1}{1-pt} - p^r t^r (1-x)\Bigr] \cdot \frac{1}{1-qt}}{1 - \Bigl[\frac{pt}{1-pt} - p^r t^r (1-x)\Bigr]\frac{qt}{1-qt}} = \frac{1 - p^r t^r (1-pt)(1-x)}{1 - t + p^r q t^{r+1} (1-pt)(1-x)}. \qquad (24)$$

Разложение $\psi(A;\ r;\ t,\ x)$ на элементарные дроби относительно переменной x имеет вид

$$\psi(A;\ r;\ t,\ x) = \sum_{\nu=0}^{r+1} \frac{R_\nu}{t_\nu - t},$$

где t_ν и R_ν — функции x.

Положим

$$\psi(A;\ r;\ t,\ x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(A;\ r;\ x)\, t^n,$$

тогда

$$P_n(A;\ r;\ x) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n \psi}{\partial t^n}(A;\ r;\ t,\ x)\Big|_{t=0} = \sum_{\nu=0}^{r+1} \frac{R_\nu}{t_\nu^{n+1}},$$

где $t_\nu \equiv t_\nu(x)$ — корни уравнения

$$\omega(A;\ r;\ t,\ x) \equiv 1 - t + p^r q t^{r+1} (1-pt)(1-x) = 0,$$

и притом

$$R_\nu \equiv R_\nu(x) = \frac{1 - p^r t_\nu^r (1 - pt_\nu)(1-x)}{1 - p^r q t_\nu^r [(r+1) - (r+2) p t_\nu] (1-x)}. \qquad (25)$$

Чтобы вычислить математическое ожидание $\sigma_n(A; r)$ и дисперсию $E_n(A; r)$ величины $M^{(n)}(A; r)$, дифференцируем $\psi(A; r; t, x)$ дважды по x:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(A; r; t, x) = \frac{p^r t^r (1-pt)^2}{[1-t+p^r q t^{r+1}(1-pt)(1-x)]^2},$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(A; r; t, x) = \frac{2p^{2r} q t^{2r+1}(1-pt)^3}{[1-t+p^r q t^{r+1}(1-pt)(1-x)]^3}$$

и затем полагаем $x=1$:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(A; r; t, x) = \frac{p^r t^r (1-pt)^2}{(1-t)^2}, \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(A; r; t, x) = \frac{2p^{2r} q t^{2r+1}(1-pt)^3}{(1-t)^3}.$$

Сравнивая коэффициенты при t^n в последних тождествах, получаем:

$$\sigma_n(A; r) = P_n'(A; r; 1) = \begin{cases} 0 & \text{при } n < r, \\ p^r & \text{при } n = r, \\ p^r q[(n-r+1)q+2p] & \text{при } n > r. \end{cases} \qquad (26)$$

Легко проверить, что $\sum_{r=1}^{n} \sigma_n(A; r) = \sigma_n(A)$. Далее,

$$P_n''(A; r; 1) =$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{при } n \leq 2r, \\ 2p^{2r}q & \text{при } n = 2r+1, \\ p^{2r}q^2\{6p^2 + 6pq(n-2r) + q^2(n-2r)(n-2r+1)\} & \text{при } n \geq 2r+2. \end{cases}$$

Так как

$$E_n^2(A; r) = P_n''(A; r; 1) + \sigma_n(A; r)[1 - \sigma_n(A; r)],$$

то

$$E_n^2(A; r) =$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{при } n < r \\ p^r(1-p^r) & \text{при } n = r \\ p^r q[(n-r+1)q+2p]\cdot \\ \qquad \cdot\{1 - p^r q[(n-r+1)q+2p]\} & \text{при } r < n \leq 2r \\ \text{то же } + 2p^{2r}q & \text{при } n = 2r+1 \\ p^{2r}q^2\{[2p-(2r+1)q]qn + [2p^2 - 4(2r+1)pq + \\ +(3r^2-1)q^2]\} + p^r q\{qn + [2p-(r-1)q]\} & \text{при } n > 2r+1 \end{cases} \qquad (27)$$

Таким образом, при $n \to \infty$

$$\sigma_n(A; r) = p^r q^2 n + O(1), \qquad (28)$$

$$E_n(A; r) = p^{\frac{r}{2}} q \sqrt{1 - p^r q[(2r+1)q - 2p]}\cdot\sqrt{n} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \qquad (29)$$

Переходя к рассмотрению предельного закона распределения величины $M^{(n)}(A; r)$, выясним предварительно, что происходит с корнями t, уравнения $\omega(A; r; t, x) = 0$, когда n растет неограниченно и, сле-

довательно, $x = e^{\frac{i\xi}{E_n\sqrt{2}}}$ стремится к единице. Упомянутому уравнению можно придать вид

$$\frac{1-t}{p^r q t^{r+1}(1-pt)} = i\frac{\xi}{E_n\sqrt{2}} - \frac{\xi^2}{4E_n} + O\left(\frac{1}{E_n^3}\right),$$

откуда видно, что при $n \to \infty$ один корень уравнения (назовем его t_0) стремится к единице, а остальные корни t_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, r+1)$ неограниченно возрастают; ясно также, что

$$t_0 = 1 - i\frac{p^r q^2 \xi}{E_n\sqrt{2}} + p^r q^2 \left\{\frac{1}{2} - p^r q\,[(r+1)q - p]\right\}\frac{\xi^2}{2E_n^2} + O\left(\frac{1}{E_n^3}\right),$$
$$\frac{1}{t_0} = 1 + i\frac{p^r q^2 \xi}{E_n\sqrt{2}} - p^r q^2 \left\{\frac{1}{2} - p^r q\,(rq - p)\right\}\frac{\xi^2}{2E_n^2} + O\left(\frac{1}{E_n^3}\right)$$

и что при этом

$$\frac{1}{|t_\nu|} = O\left(\frac{1}{E_n^{\frac{1}{r+1}}}\right) \quad (1 \leqslant \nu \leqslant r+1)$$

или, точнее,

$$\frac{|t_\nu|^{r+1}}{E_n\sqrt{2}} \sim \frac{1}{p^{r+1}q\,|\xi|} \quad (1 \leqslant \nu \leqslant r+1). \tag{30}$$

Что касается вычетов R_ν, то из последних соотношений и формулы (25) следует, что R_0 стремится к единице, а R_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, r+1)$ остаются ограниченными. Действительно, при $\nu \geqslant 1$

$$|R_\nu| = \left|\frac{1 - ip^{r+1}\xi\dfrac{t_\nu^{r+1}}{E_n\sqrt{2}} + o(1)}{1 - i(r+2)\,p^{r+1}q\xi\dfrac{t_\nu^{r+1}}{E_n\sqrt{2}} + o(1)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{p^{r+1}|\xi|\cdot\dfrac{|t_\nu|^{r+1}}{E_n\sqrt{2}} + 1 + o(1)}{(r+2)\,p^{r+1}q\,|\xi|\cdot\dfrac{|t_\nu|^{r+1}}{E_n\sqrt{2}} - 1 + o(1)} = \frac{\dfrac{1}{q} + 1 + o(1)}{r + 1 + o(1)} = O(1).$$

Таким образом,

$$P_n(A;\, r,\, e^{\frac{i\xi}{E_n\sqrt{2}}}) \sim \frac{R_0}{t_0^{n+1}} \sim e^{\,i\frac{p^r q^2 \xi n}{E_n\sqrt{2}} - \frac{1}{2}p^r q^2\{1 - p^r q\,[(2r+1)q - 2p]\}\frac{\xi^2 n}{2E_n^2}},$$

откуда, принимая во внимание формулы (28) и (29), заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{i\xi a_n}{E_n\sqrt{2}}} P_n(A;\, r;\, e^{\frac{i\xi}{E_n\sqrt{2}}}) = e^{-\frac{\xi^2}{4}}.$$

Итак, предельный закон, которому подчинена величина $M^{(n)}(A; r)$, опять-таки гауссов.

9. Обратимся к исследованию *числа r-членных A-серий и B-серий* (суммарно); обозначим его через $M^{(n)}(r)$. Вероятность того, что таких

серий появится всего m, равна сумме $\sum\limits_{(\varkappa'_m(r),\ L_n)} p^{\alpha}_{\beta}$, подчиненной ограничениям

$$\alpha_r + \beta_r = m \quad (\varkappa_m(r)) \text{ и } \sum_r r\alpha_r + \sum_s s\beta_s = n \quad (L_n).$$

Соответствующая производящая функция

$$\psi(r; t, x) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} p_m^{(n)}(r)\, t^n x^m \equiv \sum_{n=0}^{\infty} P_n(r; x)\, t^n$$

получается из основной функции посредством подстановок $x_i = t^i$, $y_k = t^k$ $(i, k \neq r)$, $x_r = y_r = t^r x$:

$$\psi(r; t; x) \doteq F\begin{pmatrix} t, t^2, \ldots, t^{r-1}, t^r x, t^{r+1}, \ldots \\ t, t^2, \ldots, t^{r-1}, t^r x, t^{r+1}, \ldots \end{pmatrix}$$

В самом деле,

$$F\begin{pmatrix} t, t^2, \ldots, t^{r-1}, t^r x, t^{r+1}, \ldots \\ t, t^2, \ldots, t^{r-1}, t^r x, t^{r+1}, \ldots \end{pmatrix} = \sum p^{\alpha}_{\beta}\, t^{\sum\limits_r r\alpha_r + \sum\limits_s s\beta_s} x^{\alpha_r + \beta_r} =$$

$$= \sum_{m,n} \Big\{ \sum_{(\varkappa'_m(r),\ L_n)} p^{\alpha}_{\beta} \Big\}\, t^n x^m = \psi(r; t, x).$$

Оказывается, что

$$\psi(r; t, x) = \frac{\left[1 + \sum\limits_{i=1}^{\infty} p^i t^i - p^r t^r (1-x)\right]\left[1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k t^k - q^r t^r (1-x)\right]}{1 - \left[\sum\limits_{i=1}^{\infty} p^i t^i - p^r t^r (1-x)\right]\left[\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k t^k - q^r t^r (1-x)\right]} =$$

$$= \frac{\left[\frac{1}{1-pt} - p^r t^r (1-x)\right]\left[\frac{1}{1-qt} - q^r t^r (1-x)\right]}{1 - \left[\frac{pt}{1-pt} - p^r t^r (1-x)\right]\left[\frac{qt}{1-qt} - q^r t^r (1-x)\right]} =$$

$$= \frac{[1 - p^r t^r (1-pt)(1-x)]\,[1 - q^r t^r (1-qt)(1-x)]}{1 - t + pqt^{r+1}(s_{r-1} - s_r t)(1-x) - p^r q^r t^{2r}(1-pt)(1-qt)(1-x)^2}, \tag{31}$$

где для краткости положено

$$s_r = p^r + q^r \quad (r = 0, 1, 2, \ldots). \tag{32}$$

Дробь, представляющая $\psi(r; t, x)$, — неправильная относительно переменной t. Исключим целую часть и разложим на элементарные дроби:

$$\psi(r; t, x) = -1 + \frac{2 - t - t^r s_r (1-pt)(1-qt)(1-x)}{1 - t + pqt^{r+1}(s_{r-1} - s_r t)(1-x) - p^r q^r t^{2r}(1-pt)(1-qt)(1-x)^2} =$$

$$= -1 + \sum_{\nu=0}^{2r+1} \frac{R_\nu}{t_\nu - t},$$

где $t_\nu \equiv t_\nu(x)$ — корни уравнения

$$\omega(r; t, x) \equiv 1 - t + pqt^{r+1}(s_{r-1} - s_r t)(1-x) -$$
$$- p^r q^r t^{2r}(1-pt)(1-qt)(1-x)^2 = 0,$$

а вычеты $R_\nu \equiv R_\nu(x)$ вычисляются по формуле

$$R_\nu = \frac{2 - t_\nu - t_\nu^r s_r (1 - pt_\nu)(1 - qt_\nu)(1 - x)}{1 - pqt_\nu^r[(r+1)s_{r-1} - (r+2)s_r t_\nu](1-x) + p^r q^r t_\nu^{2r-1}[2r - (2r+1)t_\nu + 2(r+1)qpt_\nu^2](1-x)^2}.$$

Дифференцируя $\psi(r;\ t,\ x)$ по x

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = t^r \frac{\{s_r + 2(pqs_{r-1} - s_r)t + [-pqs_{r-1} + (1-pq)s_r]t^2\}}{\{1 - t + pqt^{r+1}(s_{r-1} - s_r t)(1-x) - p^r q^r (1-pt)(1-qt)(1-x)^2\}^2} -$$
$$- \frac{2p^r q^r t^r (2-t)(1-pt)(1-qt)(1-x) - s_r(1-t)(1-pt)(1-qt)(1-x)^2}{\{1 - t + pqt^{r+1}(s_{r-1} - s_r t)(1-x) - p^r q^r (1-pt)(1-qt)(1-x)^2\}^2}$$

и полагая $x = 1$, получаем

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(r;\ t,\ 1) = \frac{t^r}{(1-t)^2}(A_0 + A_1 t + A_2 t^2),$$

где

$$A_0 = s_r, \quad A_1 = 2(pqs_{r-1} - s_r), \quad A_2 = -pqs_{r-1} + (1 - pq)s_r;$$

тогда разложение по степеням t и сравнение коэффициентов дает:

$$\sigma_n(r) = P'_n(r;1) = \begin{cases} 0 & \text{при } n < r \\ A_0 & \text{при } n = r \\ K_1 n + K_0 & \text{при } n > r, \end{cases} \tag{33}$$

где положено

$$K_1 = A_0 + A_1 + A_2 = pq(s_{r-1} - s_r), \quad K_0 = -(r-1)A_0 - rA_1 - (r+1)A_2 =$$
$$= pq\{-(r-1)s_{r-1} + (r+1)s_{r+1}\}.$$

Таким образом, при $n \to \infty$

$$\sigma_n(r) \sim K_1 n,$$

точнее,

$$\sigma_n(r) = pq(s_{r-1} - s_r)n + O(1).$$

Заметим, что, как и следовало ожидать,

$$\sigma_n(A;\ r) + \sigma_n(B;\ r) = \sigma_n(r), \quad \sum_{r=1}^{n} \sigma_n(r) = \sigma_n.$$

Дальше, если продифференцируем функцию $\psi(r;\ t,\ x)$ дважды по x и затем положим $x = 1$, то получим

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(r;\ t,\ 1) = \frac{2t^{2r}}{(1-t)^3}(B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + B_3 t^3 + B_4 t^4),$$

причем

$$\begin{aligned} B_0 &= 2p^r q^r, \\ B_1 &= pqs_{r-1}s_r + 5p^r q^r, \\ B_2 &= pq(-2pqs_{r-1}^2 - 2s_{r-1}s_r - s_r^2) + 4p^r q^r + 2p^{r+1}q^{r+1}, \\ B_3 &= pq[-pqs_{r-1}^2 + (1 - 3pq)s_{r-1}s_r + 2s_r^2] + p^r q^r - 3p^{r+1}q^{r+1}, \\ B_4 &= pq[pqs_{r-1}s_r - (1-pq)s_r^2] + p^{r+1}q^{r+1}. \end{aligned} \tag{34}$$

Сравнение коэффициентов при t^n дает

$$P''_n(r;1) = \begin{cases} 0 & \text{при } n < 2r, \\ 2B_0 = 4p^r q^r & \text{при } n = 2r, \\ 2(3B_0 + B_1) = 2(pqs_{r-1}s_r + p^r q^r) & \text{при } n = 2r + 1; \end{cases}$$

наконец, при $n \geq 2r + 2$

$$P''_n(r;1) = L_2 n^2 + L_1 n + L_0,$$

где положено

$$L_2 = B_0 + B_1 + B_2 + B_3 + B_4,$$
$$L_1 = -\{(4r-3)\,B_0 + (4r-1)\,B_1 + (4r+1)\,B_2 + (4r+3)\,B_3 + (4r+5)\,B_4\} = = -4rL_2 + (3B_0 + B_1 - B_2 - 3B_3 - 5B_4),$$
$$L_0 = (2r-1)(2r-2)\,B_0 + 2r\,(2r-1)\,B_1 + (2r+1)\,2rB_2 + (2r+2)(2r+1)\,B_3 + + (2r+3)\,(2r+2)\,B_4 = -4rL_2 - 2rL_1 + 2\,(B_0 + B_3 + 3B_4),$$

или, с помощью формул (34),

$$\left.\begin{aligned} &L_2 = p^2q^2\,(s_{r-1} - s_r)^2, \\ &L_1 = -p^2q^2\,[(4r-1)\,s_{r-1}^2 - 4\,(2r+1)\,s_{r-1}s_r + (4r+5)\,s_r^2] + 2p^{r+1}q^{r+1}, \\ &L_0 = 2pq\,\{(2r^2 - r - 1)\,pqs_{r-1}^2 + [1 - 4r\,(r+1)\,pq]s_{r-1}s_r - \\ &\quad - [1 - (2r^2 + 5r + 3)\,pq]\,s_r^2\} + 2p^rq^r - 4rp^{r+1}q^{r+1}. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Отсюда следует

$$E_n^2(r) = P_n''(r;\,1) + \sigma_n(r) - \sigma_n^2(r),$$

так что

$$E_n^2(r) = \begin{cases} 0 & \text{при } n < r, \\ s_r - s_r^2 & \text{при } n = r, \\ (K_1n + K_0) - (K_1n + K_0)^2 = & \\ = pq\,[(n-r+1)\,s_{r-1} - (n-r-1)\,s_r] - & \\ \quad - p^2q^2\,[(n-r+1)\,s_{r-1} - (n-r-1)\,s_r]^2 & \text{при } r < n < 2r, \\ \qquad \text{то же } + 4p^rq^r & \text{при } n = 2r \\ \qquad \text{то же } + 2\,(pqs_{r-1}s_r + p^rq^r) & \text{при } n = 2r+1 \end{cases} \tag{36'}$$

и, наконец, при $n \geqslant 2r+2$

$$E_n^2(r) = M_2n^2 + M_1n + M_0, \tag{36''}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &M_2 = L_2 - K_1^2, \\ &M_1 = L_1 + K_1 - 2K_0K_1, \\ &M_0 = L_0 + K_0 - K_0^2. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Но с помощью (35) из соотношений (37) следует:

$$\left.\begin{aligned} &M_2 = 0, \\ &M_1 = p^2q^2\,\{-(2r+1)\,s_{r-1}^2 + 4\,(r+1)\,s_{r-1}s_r - (2r+3)\,s_r^2\} + \\ &\qquad + pq\,(s_{r-1} - s_r) + 2p^{r+1}q^{r+1}, \\ &M_0 = pq\,\{3\,(r^2-1)\,pqs_{r-1}^2 + 2\,[1 - (r+1)\,(3r+1)\,pq]\,s_{r-1}s_r - \\ &\quad - [2 - (r+1)\,(3r+5)\,pq]\,s_r^2\} + 2p^rq^r - 4rp^{r+1}q^{r+1}. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Таким образом, при $n \to \infty$

$$E_n(r) = \sqrt{M_1}\cdot\sqrt{n} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{39}$$

Обратимся к рассмотрению предельного закона распределения величины $M^{(n)}(r)$. Когда n неограниченно возрастает, один из $2r+2$

корней $t_\nu \equiv t_\nu(x)$, $x = e^{\frac{i\xi}{E_n\sqrt{2}}}$ уравнения $\omega(r;\, t,\, x) = 0$, скажем t_0, стремится к 1; остальные — неограниченно возрастают. Легко установить, что

$$t_0 = 1 + \alpha \frac{\xi}{E_n\sqrt{2}} + \beta \frac{\xi^2}{2E_n^2} + O\left(\frac{1}{E_n^3}\right) *,$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\alpha = -iqp\,(s_{r-1} - s_r), \\ &\beta = \tfrac{1}{2}pq\,(s_{r-1} - s_r) - p^2q^2\,(s_{r-1} - s_r)\,[(r+1)\,s_{r-1} - (r+2)\,s_r] + p^{r+1}q^{r+1}. \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

Когда n стремится к бесконечности, то вычет R_0 стремится к единице, все же прочие вычеты R_ν $(\nu = 1, \ldots, 2r+1)$ остаются ограниченными.

Далее, мы получаем

$$P_n(r;\, x) = \sum_{\nu=0}^{2r+1} \frac{R_\nu}{t_\nu^{n+1}},$$

а из предыдущих соображений следует, что

$$P_n\left(r;\, e^{\frac{i\xi}{E_n\sqrt{2}}}\right) \sim \frac{R_0}{t_0^{n+1}} \sim \frac{1}{t_0^{n+1}}.$$

Закон распределения нормированной величины $\frac{M^{(n)}(r) - \sigma_n}{E_n\sqrt{2}}$ имеет вид:

$$\Phi_n(\xi) = e^{-\frac{i\xi\sigma_n}{E_n\sqrt{2}}}\, P_n\left(r;\, e^{\frac{i\xi}{E_n\sqrt{2}}}\right).$$

Логарифмируя последнее соотношение, находим

$$\log \Phi_n(\xi) = -\frac{i\xi\sigma_n}{E_n\sqrt{2}} + \log P_n\left(r;\, e^{\frac{i\xi}{E_n\sqrt{2}}}\right),$$

и так как

$$\log P_n\left(r;\, e^{\frac{i\xi}{E_n\sqrt{2}}}\right) = -(n+1)\log t_0 + O\left(\frac{1}{E_n^2}\right) = -(n+1)\left\{\alpha\frac{\xi}{E_n\sqrt{2}} + \left(\beta - \frac{1}{2}\alpha^2\right)\frac{\xi^2}{2E_n^2} + O\left(\frac{1}{E_n^3}\right)\right\} = -\frac{n\alpha\xi}{E_n\sqrt{2}} - \left(\beta - \frac{1}{2}\alpha^2\right)\frac{n\xi^2}{2E_n^2} + o(1),$$

$$\log \Phi_n(\xi) = -(i\sigma_n + n\alpha)\frac{\xi}{E_n\sqrt{2}} - \left(\beta - \frac{1}{2}\alpha^2\right)\frac{n\xi^2}{2E_n^2} + o(1).$$

Но согласно формулам (33) и (40),

$$i\sigma_n + n\alpha = O(1),$$

$$\beta - \frac{1}{2}\alpha^2 = \left\{\frac{1}{2}pq\,(s_{r-1} - s_r) - p^2q^2\,(s_{r-1} - s_r)\,[(r+1)\,s_{r-1} - (r+2)\,s_r] + p^{r+1}q^{r+1}\right\} + \frac{1}{2}p^2q^2\,(s_{r-1} - s_r) = \frac{1}{2}M_1.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \log \Phi_n(\xi) = -\frac{M_1}{4}\xi^2 \lim_{n\to\infty}\frac{n}{E_n^2} = -\frac{\xi^2}{4}.$$

Отсюда ясно, что предельный закон — гауссов.

* В дальнейшем опущен значок r при σ_n и E_n.

10. Посмотрим теперь, что можно сказать о *длине максимальной A-серии* в n опытах. Мы подразумеваем, что длина максимальной A-серии равна m, если в нашем ряде опытов имеется m-членная A-серия, но нет A-серий с числом членов, большим чем m. Обозначим длину максимальной A-серии в n опытах через $\Lambda^{(n)}$. Пусть, далее, $\Pi_m^{(n)}$ есть вероятность того, что $\Lambda^{(n)}$ меньше чем m. Положим

$$\varphi_m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_m^{(n)} t^n$$

и вычислим функцию $\varphi_m(t)$. Так как вероятность $\Pi_m^{(n)}$ равна сумме $\sum\limits_{(K_n,\, N_m)} p_{\substack{\alpha\\ \beta}}$, взятой с ограничениями

$$\sum_r r\alpha_r + \sum_s s\beta_s = n \quad (K_n) \text{ и } \alpha_m = \alpha_{m+1} = \ldots = 0 \quad (N_m),$$

то легко понять, что производящая функция $\varphi_m(t)$ получается из основной функции $F\binom{x_r}{y_s}$ посредством замены x_r через t^r при $r < m$ и через 0 при $r \geqslant m$, и замены y_s через t^s при всех s:

$$\varphi_m(t) = F\begin{pmatrix} t, t^2, \ldots, t^{m-1}, 0, \ldots \\ t, t^2, \ldots, t^{m-1}, t^m, \ldots \end{pmatrix}$$

Действительно,

$$F\begin{pmatrix} t, t^2, \ldots, t^{m-1}, 0, \ldots \\ t, t^2, \ldots, t^{m-1}, t^m, \ldots \end{pmatrix} = \sum p_{\substack{\alpha\\ \beta}}\, t^{\sum\limits_{r=1}^{m-1} r\alpha_r + \sum\limits_s s\beta_s} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big\{ \sum_{(K_n, N_m)} p_{\substack{\alpha\\ \beta}} \Big\} t^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_m^{(n)} t^n = \varphi_m(t).$$

Выполняя подстановку, получаем:

$$F\begin{pmatrix} t, t^2, \ldots, t^{m-1}, 0, \ldots \\ t, t^2, \ldots, t^{m-1}, t^m, \ldots \end{pmatrix} = \frac{\Big(1 + \sum\limits_{r=1}^{m-1} p^r t^r\Big)\Big(1 + \sum\limits_{s=1}^{\infty} q^s t^s\Big)}{1 - \sum\limits_{r=1}^{m-1} p^r t^r \cdot \sum\limits_{s=1}^{\infty} q^s t^s} =$$

$$= \frac{\left(1 + \dfrac{pt - p^m t^m}{1 - pt}\right) \cdot \dfrac{1}{1 - qt}}{1 - \dfrac{pt - p^m t^m}{1 - pt} \cdot \dfrac{qt}{1 - qt}} = \frac{1 - p^m t^m}{1 - t + p^m q t^{m+1}}.$$

Итак,

$$\varphi_m(t) = \frac{1 - p^m t^m}{1 - t + p^m q t^{m+1}}. \tag{41}$$

Нас интересует коэффициент при t^n в разложении этой функции по степеням t. Выясним, как расположены нули полинома

$$\omega_m(t) \equiv 1 - t + p^m q t^{m+1}.$$

Так как $\omega_m(1) = p^m q > 0$, а $\omega_m\left(1 + \frac{1}{m}\right) = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1}\Big[p^m q - - \frac{m^m}{(m+1)^{m+1}}\Big] \leqslant 0$ $\left(\text{действительно, } p^m q \leqslant \frac{m^m}{(m+1)^{m+1}}\right)$, то уравнение

$\omega_m(t)=0$ имеет корень в промежутке $1<t<1+\frac{1}{m}$; этот корень — единственный в указанном промежутке, так как функция $\omega_m(t)$ в нем убывающая, и, кроме того (если m достаточно велико), он — простой, так как кратные корни возможны только при условии $p^m q=\frac{m^m}{(m+1)^{m+1}}$. Обозначим этот корень через $t_0^{(m)}$. Все остальные нули полинома $\omega_m(t)$ (обозначим их через t_ν^m $(\nu=1, 2, \ldots, m)$) удовлетворяют неравенству

$$|t_\nu^{(m)}|\geqslant\frac{1}{p}>1.$$

В этом можно легко убедиться, если, положив $t=re^{i\theta}$, заменить уравнение $\omega_m(t)=0$, которому можно также придать вид

$$p^m t^m=\frac{1}{q}\,\frac{t-1}{t},$$

эквивалентной ему системой

$$\begin{cases} |pt|^m=\frac{1}{q}\left|\frac{t-1}{t}\right|, & (42)\\ m\ \arg\ t\equiv\arg\frac{t-1}{t}\ (\operatorname{mod}\ 2\pi). & (43)\end{cases}$$

Уравнение (42) преобразуется к виду

$$\cos\theta=\frac{1+r^2-p^{2m}q^2r^{2(m+1)}}{2r}; \qquad (44)$$

что касается уравнения (43), то вытекающее из него (но ему не эквивалентное) уравнение

$$m\ \arg\ t\equiv\arg\frac{t-1}{t}\ (\operatorname{mod}\ \pi) \qquad (45)$$

может быть записано в форме

$$r=\frac{\sin(m+1)\theta}{\sin m\theta}. \qquad (46)$$

Геометрически уравнение (46) представляет паукообразную кривую, расположенную симметрично относительно оси $\theta=0$; эта кривая состоит из петли («живот паука»), имеющей диаметром отрезок $0\leqslant r\leqslant 1+\frac{1}{m}$, $\theta=0$, ветвей, находящихся вне петли и удаляющихся в бесконечность («ноги паука»), и прямой — оси $\theta=0$. Кривая же (44) состоит из двух овалов: меньший из них заключен в «животе паука» и пересекается с осью $\theta=0$ в двух точках, из которых только одна удовлетворяет уравнению (43) (это и есть как раз нуль функции $\omega_m(t)$, $t=t_0^{(m)}$); больший овал, напротив, охватывает «живот паука» и режет ему «ноги». Все нули $t_\nu^{(m)}$ $(\nu=1, 2, \ldots, m)$ расположены на большом овале; наименьший из них по модулю лежит на оси $\theta=0$ и равен $\frac{1}{p}$; наибольший же из них не превышает максимального радиуса-вектора овала, а именно положительного корня уравнения

$$1+r-p^m q r^{m+1}=0.$$

Этот корень при $m \to \infty$ стремится к $\frac{1}{p}$. Поэтому

$$\frac{1}{p} \leqslant |t_\nu^{(m)}| < \frac{1}{p} + \varepsilon_m, \quad \varepsilon_m \to 0. \tag{47}$$

Обратимся к более точной оценке $t_0^{(m)}$. Полагая $t_0^{(m)} = 1 + u_m$, получим из равенства $\omega_m(t_0^{(m)}) = 0$

$$u_m = p^m q (1 + u_m)^{m+1}. \tag{48}$$

Так как $u \to 0$, то при достаточно больших значениях m

$$u_m < p^m q (1 + \varepsilon)^{m+1} \quad (\varepsilon > 0),$$

следовательно,

$$\varlimsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{u_m} \leqslant p(1+\varepsilon).$$

Пусть ρ — число, удовлетворяющее неравенству $p < \rho < 1$; возьмем $\varepsilon = \frac{\rho}{q} - 1$, тогда

$$\varlimsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{u_m} \leqslant \rho,$$

и, значит, при всех значениях m,

$$u_m \leqslant K\rho^m \quad (K \text{ — константа}).$$

Но тогда из равенства (48) вытекает

$$u_m \sim p^m q.$$

Итак,

$$t_0^{(m)} = 1 + p^m q + o(p^m). \tag{49}$$

Разложим функцию $\varphi_m(t)$ на элементарные дроби:

$$\varphi_m(t) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{R_\nu^{(m)}}{t_\nu^{(m)} - t};$$

далее, получаем

$$\Pi_m^{(n)} = \frac{1}{n!}\varphi_m^{(n)}(0) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{R_\nu^{(m)}}{t_\nu^{(m)^{n+1}}} = \frac{R_0^{(m)}}{t_0^{(m)^{n+1}}} = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{R_\nu^{(m)}}{t_\nu^{(m)^{n+1}}}.$$

Вычеты $R_\nu^{(m)}$ вычисляются по формуле

$$R_\nu^{(m)} = \frac{1 - p^m t_\nu^{(m)^m}}{1 - (m+1)\, p^m q t_\nu^{(m)^m}} = \frac{1 - p t_\nu^{(m)}}{q\,[(m+1) - m t_\nu^{(m)}]} \quad (\nu = 0, 1, \ldots, m). \tag{50}$$

Подставляя сюда значение $t_0^{(m)}$ из формулы (49), будем иметь в случае $\nu = 0$

$$R_0^{(m)} = 1 + O(p^m), \tag{51}$$

тогда как при $\nu \geqslant 1$ (если m достаточно велико) мы получаем с помощью (47)

$$|R_\nu^{(m)}| \leqslant \frac{1 + p\,|t_\nu^{(m)}|}{mq\left|t_\nu^{(m)} - \frac{m+1}{m}\right|} \leqslant \frac{1 + p\left(\frac{1}{p} + \varepsilon_m\right)}{mq\left(\frac{1}{p} - \frac{m+1}{m}\right)} = \frac{(2 + p\varepsilon_m)\,p}{(mq - p)\,q}.$$

Таким образом, при $\nu > 1$

$$R_\nu^{(m)} = O\left(\frac{1}{m}\right).$$

Принимая во внимание указанные обстоятельства, мы приходим к заключению, что

$$\Pi_m^{(n)} = \frac{1 + O(p^m)}{[1 + qp^m + O(p^m)]^{n+1}} + O(p^n). \tag{52}$$

Обозначим соответственно через $\left[\frac{\log n}{\log \frac{1}{p}}\right]$ и через θ_n целую и дробную части числа $\frac{\log n}{\log \frac{1}{p}}$, так что

$$\frac{\log n}{\log \frac{1}{p}} = \left[\frac{\log n}{\log \frac{1}{p}}\right] + \theta_n,$$

Тогда, полагая m равным $\left[\frac{\log n}{\log \frac{1}{p}}\right]$ и подразумевая под λ любое фиксированное целое число, мы получим

$$p^m = p^{\left[\frac{\log n}{\log \frac{1}{p}}\right]} = p^{\frac{\log n}{\log \frac{1}{p}} - \theta_n} = \frac{1}{n} p^{-\theta_n};$$

откуда при $n \to \infty$

$$\Pi_{m+\lambda}^{(n)} = \frac{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)}{\left[1 + \frac{1}{n} qp^{-\theta_n + \lambda} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n} \sim e^{-qp^{-\theta_n + \lambda}} \tag{53}$$

Каково бы ни было число α $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$, можно подобрать такую последовательность $\{n_k\}$, что

$$\lim_{k \to \infty} \theta_{n_k} = \alpha;$$

в таком случае

$$\lim_{k \to \infty} \Pi_{m_k+\lambda}^{(n_k)} = e^{-qp^{-\alpha+\lambda}} \qquad \left(m_k = \left[\frac{\log n_k}{\log \frac{1}{p}}\right]\right).$$

Иными словами,

$$\lim_{k \to \infty} \text{Вер}\,\{\Lambda^{(n_k)} < m_k + \lambda\} = \lim_{k \to \infty} \text{Вер}\,\{\Lambda^{(n_k)} - m_k < \lambda\} = e^{-qp^{-\alpha+\lambda}},$$

так что случайная величина $\Lambda^{(n_k)} - \left[\frac{\log n_k}{\log \frac{1}{p}}\right]$ в пределе (при $k \to \infty$) подчинена ступенчатому закону, зависящему от параметра α и определяемому формулой

$$F_\alpha(t) = e^{-qp^{-\alpha+\lambda}} \quad (\lambda - 1 < t < \lambda). \tag{54}$$

Законы $F_\alpha(t)$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ являются, если можно так выразиться, «точками сгущения» для множества законов, которым подчинены величины

$\Lambda^{(n)} - \frac{\log n}{\log \frac{1}{p}}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Эти предельные законы — не гауссова типа: их можно назвать «дважды-экспоненциальными».

Каждому из законов $F_\alpha(t)$ соответствует математическое ожидание, зависящее от α и меняющееся в конечных пределах, когда α пробегает промежуток от 0 до 1. Отсюда ясно, что математическое ожидание длины максимальной A-серии имеет вид $\left[\frac{\log n}{\log \frac{1}{p}}\right] + O(1)$; можно поэтому сказать, что оно асимптотически равно $\frac{\log n}{\log \frac{1}{p}}$, тогда как следующий член асимптотического разложения колеблется между двумя постоянными числами, не имея определенного предела*.

II

11. Как известно, последовательность элементов $e_1, e_2, \ldots, e_r$ $(1 \leqslant r \leqslant n)$ образует r-членный цикл в перестановке из n элементов $1, 2, \ldots, n$, если элемент e_1 переходит в e_2, e_2 в e_3 и т. д.; наконец, элемент e_r снова в e_1, причем $e_i \neq e_j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, r;\ i \neq j)$. Вместо «$r$-членный цикл» говорят иногда «цикл r-го порядка».

Каждая перестановка может быть разложена на циклы; например, перестановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 5 & 8 & 15 & 18 & 19 & 14 & 6 & 3 & 4 & 17 & 11 & 16 & 12 & 1 & 10 & 13 & 9 & 2 & 7 & 20 \end{pmatrix}$$

разбивается на 9-членный цикл (2, 8, 3, 15, 10, 17, 9, 4, 18), 6-членный цикл (1, 6, 19, 7, 6, 14), 3-членный цикл (12, 16, 13) и два одночленных цикла (11) и (20).

В дальнейшем при изложении некоторых теоретико-вероятностных результатов, относящихся к разбиению перестановок на циклы, все $n!$ перестановок из n элементов предполагаются *равновозможными*.

Пусть α_r — число r-членных циклов в перестановке $(r = 1, 2, \ldots, n)$, s — число всех циклов, и $m_1, m_2, \ldots, m_s$ — число членов в циклах, рас-

* Что некоторые из числа рассмотренных здесь величин в пределе при $n \to \infty$ подчиняются закону Гаусса,— как на то обратил мое внимание С. Н. Бернштейн,— можно заключить также из принадлежащих ему общих теорем. В самом деле, например, число A-серий в n опытах равно числу появлений комбинаций AB в рассматриваемой последовательности опытов (оно на единицу больше, если событие A появилось в последнем опыте, но это мало существенно); что же касается этих комбинаций, то любые две из них при разности номеров опытов $\geqslant 2$ являются независимыми событиями. Аналогичное утверждение справедливо и относительно p-членных A-серий, если введем в рассмотрение комбинации типа $\underbrace{BAA\ldots AB}_{p \text{ раз}}$; такие комбинации также независимы при разности номеров опытов $\geqslant p+2$. То же замечание позволяет распространить эти выводы на случай схемы Пуассона.

положенных в каком угодно порядке. Очевидно,

$$\sum_{r=1}^{n} \alpha_r = s \quad (1 \leqslant s \leqslant n) \tag{55}$$

$$\sum_{i=1}^{s} m_i = \sum_{r=1}^{n} r\alpha_r = n; \tag{56}$$

последнее равенство следует из того, что α_r не что иное, как число чисел, равных r, среди чисел $m_1, m_2, \ldots, m_s$. Распределим перестановки по *классам*, относя к одному и тому же классу те перестановки, для которых совокупности чисел $m_1, m_2, \ldots, m_s$ (с учетом кратности, независимо от порядка) — или, что то же, последовательности чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (взятые в указанном порядке) — будут одинаковыми. Условимся ради краткости называть числа α_r индексами класса.

Считая n и числа $m_1, m_2, \ldots, m_s$ заданными, определим число перестановок класса, характеризуемого совокупностью чисел $m_1, m_2, \ldots, m_s$. Имеется всего

$$C_n^{m_1, m_2, \ldots, m_s} = \frac{n!}{m_1!\, m_2! \ldots m_s!}$$

способов разбить n элементов на s групп, содержащих соответственно $m_1, m_2, \ldots, m_s$ элементов. В i-ой группе, содержащей m_i элементов ($i = 1, 2, \ldots, s$), можно переставлять элементы $m_i!$ способами, но только $\frac{m_i!}{m_i} = (m_i - 1)!$ из этих перестановок образуют *различные* циклы, так как r-членный цикл, составленный из элементов $e_1, e_2, \ldots, e_r$ можно записать r способами, — начиная с любого элемента: $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$, $(e_2, e_3, \ldots, e_r, e_1)$, $(e_3, \ldots, e_r, e_1, e_2)$ и т. д., наконец, $(e_r, e_1, e_2, \ldots, e_{r-1})$. С другой стороны, раз среди чисел $m_1, m_2, \ldots, m_s$ имеется α_r равных r, то α_r групп, содержащих по r элементов, можно переставлять *между собою* $\alpha_r!$ способами, не выходя из пределов намеченного класса перестановок — это уменьшает число подсчитанных перестановок в $\alpha_r!$ раз ($r = 1, 2, \ldots, n$). Таким образом, всего перестановок в нашем классе содержится

$$C_n^{m_1, m_2, \ldots, m_s} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{s} (m_i - 1)!}{\prod_{r=1}^{n} \alpha_r!} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{s} (m_i!)} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{s} (m_i - 1)!}{\prod_{r=1}^{n} \alpha_r!} =$$

$$= \frac{n!}{\prod_{i=1}^{s} m_i \cdot \prod_{r=1}^{n} \alpha_r!} = \frac{n!}{\prod_{r=1}^{n} r^{\alpha_r} \prod_{r=1}^{n} \alpha_r!}.$$

Так как всех возможных перестановок из n элементов имеется $n!$, то для вероятности $p^{(n)}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}$ того, что перестановка принадлежит

классу, характеризуемому последовательностью индексов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, получается формула

$$p^{(n)}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} = \frac{1}{\prod\limits_r r^{\alpha_r} \cdot \prod\limits_r \alpha_r!} = \frac{1}{1^{\alpha_1} \, 2^{\alpha_2} \ldots n^{\alpha_n} \cdot \alpha_1! \, \alpha_2! \ldots \alpha_n!}. \tag{57}$$

Например, при $n = 4$ возможны классы, характеризуемые последовательностями индексов

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = 4, \ \alpha_2 = \quad \alpha_3 = \quad \alpha_4 = 0. \\ &\alpha_1 = 2, \ \alpha_2 = 1, \ \alpha_3 = \quad \alpha_4 = 0, \\ &\alpha_1 = 1, \ \alpha_2 = 0, \ \alpha_3 = 1, \ \alpha_4 = 0, \\ &\alpha_1 = 0, \ \alpha_2 = 2, \ \alpha_3 = \quad \alpha_4 = 0, \\ &\alpha_1 = \quad \alpha_2 = \quad \alpha_3 = 0, \ \alpha_4 = 1, \end{aligned}$$

вероятности классов оказываются соответственно равными

$$p^{(4)}_{4,0,0,0} = \frac{1}{24}, \quad p^{(4)}_{2,1,0,0} = \frac{1}{4}, \quad p^{(4)}_{1,0,1,0} = \frac{1}{3}, \quad p^{(4)}_{0,2,0,0} = \frac{1}{8}, \quad p^{(4)}_{0,0,0,1} = \frac{1}{4}.$$

12. Наименее вероятен, очевидно, класс, содержащий единственную, именно, идентичную, перестановку. Он характеризуется индексами $\alpha_1 = n_1$, $\alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, и вероятность его равна

$$p^{(n)}_{n,0,\ldots,0} = \frac{1}{n!}.$$

Остановимся на выяснении того, какой из классов оказывается *наиболее вероятным*.

Требуется найти минимум произведения

$$1^{\alpha_1} \cdot 2^{\alpha_2} \ldots n^{\alpha_n} \cdot \alpha_1! \, \alpha_2! \cdots \alpha_n! \tag{58}$$

при условии, что целые неотрицательные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ подчинены условию (56).

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — искомая последовательность индексов, минимализирующая произведение (58), и ν — номер последнего индекса, не равного нулю, так что $\alpha_\nu \geqslant 1$, $\alpha_{\nu+1} = \alpha_{\nu+2} = \ldots = \alpha_n = 0$.

Установим, прежде всего, что (в предположении $\nu \geqslant 3$)

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_{\nu-1} = 0. \tag{59}$$

В самом деле, пусть, напротив, $\alpha_k \geqslant 1$, где $2 \leqslant k \leqslant \nu - 1$. Тогда непременно

$$n = \sum_{r=1}^{n} r\alpha_r \geqslant k\alpha_k + \nu\alpha_\nu \geqslant k + \nu. \tag{60}$$

Поскольку

$$k\alpha_k + \nu\alpha_\nu = k(\alpha_k - 1) + \nu(\alpha_\nu - 1) + (k + \nu) \cdot 1, \tag{61}$$

условие (56) не нарушается, если индексы α_k и α_ν уменьшим на единицу и зато заменим индекс $\alpha_{k+\nu}$, равный нулю, единицей. Отношение вариированного таким образом произведения к рассматриваемому минимальному произведению равно

$$\frac{k + \nu}{k\nu\alpha_k \alpha_\nu}$$

и оно меньше единицы, так как

$$\frac{k+\nu}{k\nu\alpha_k\alpha_\nu} \leqslant \frac{k+\nu}{k\nu} = \frac{1}{k} + \frac{1}{\nu} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} < 1\,,$$

а это противоречит допущению.

Теперь, предполагая $\nu \geqslant 2$, докажем, что

$$\alpha_1 = 1. \tag{62}$$

Действительно, пусть $\alpha_1 \geqslant 2$. Тогда неравенства (60) и (61), справедливые при $k=1$, показывают, что, варьируя произведение как раньше, т. е. уменьшая α_1 и α_ν на единицу и заменяя $\alpha_{\nu+1}$, равное нулю, единицей, получим в качестве отношения варьированного произведения к минимальному

$$\frac{\nu+1}{\nu\alpha_1\alpha_\nu} \leqslant \frac{\nu+1}{2\nu} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\nu}\right) \leqslant \frac{3}{4} < 1\,,$$

что опять-таки невозможно.

Убедимся, далее, что при $\nu \geqslant 2$

$$\alpha_\nu = 1. \tag{63}$$

Пусть $\alpha^\nu \leqslant 2$. Тогда

$$n = \sum_r r\alpha_r \geqslant \nu\alpha_\nu \geqslant 2\nu,$$

и из равенства

$$\nu\alpha_\nu + 2\nu\cdot 0 = \nu(\alpha_\nu - 2) + 2\nu\cdot 1$$

видно, что систему индексов можно варьировать, уменьшая индекс α_ν на две единицы и зато заменяя индекс $\alpha_{2\nu}$, равный нулю, единицей. Соответствующее отношение произведений равняется

$$\frac{2}{\nu\alpha_\nu(\alpha_\nu - 1)} \leqslant \frac{1}{2} < 1,$$

откуда возникает противоречие.

Если $\nu = 1$, то условие (63) дает $\alpha_\nu \equiv \alpha_1 = n$. При $n=2$ последовательность индексов $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 0$ определяет класс, вероятность которого, как и вероятность другого возможного класса ($\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$), равна $\frac{1}{2}$. При $n \geqslant 3$ класс ($\alpha_1 = n$, $\alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$) окажется не наиболее, а наименее вероятным. Что же касается наиболее вероятного класса, то для него при $n \geqslant 3$ мы должны иметь $\nu \geqslant 2$. Но так как, по доказанному, при этом последнем предположении все числа α_r обращаются в нуль, кроме α_1 и α_ν, которые равны единице, то условие (56) теперь дает:

$$1\cdot 1 + \nu\cdot 1 = n,$$

откуда $\nu = n-1$.

Итак, при $n \geqslant 3$ наиболее вероятный класс характеризуется последовательностью индексов

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-2} = 0, \quad \alpha_{n-1} = 1, \quad \alpha_n = 0, \tag{64}$$

т. е. перестановки этого класса разбиваются на два цикла: один одночленный и один $(n-1)$-членный. Вероятность этого класса равна

$$p^{(n)}_{1,\,0,\,\ldots,\,0,\,1,\,0} = \frac{1}{n-1}.$$

Подобным же образом можно поставить вопрос о классах перестановок, которые стоят на втором, третьем и т. д. местах по величине вероятностей *. Порядковый номер класса, вообще говоря, зависит от числа элементов n. Однако нетрудно доказать, что, каков бы ни был наперед заданный номер k, *начиная с некоторого определенного* n (при $n \geqslant n_k$) на k-ом месте ($k \geqslant 3$) стоит класс перестановок, в котором среди общего числа s циклов содержится $s-1$ «коротких» циклов, порядки которых зависят только от k, и один «длинный» цикл, порядок которого имеет вид $n-p$, где p зависит только от k. Что касается случая $k=2$, то на втором месте стоит класс перестановок, состоящий из единственного цикла порядка n.

Именно, если условимся обозначать через $p(m_1, m_2, \ldots, m_s)$ вероятность того класса перестановок, который разбивается на циклы порядков $m_1, m_2, \ldots$ и т. д., наконец, m_s $(m_1 \leqslant m_2 \leqslant \ldots \leqslant m_s)$ **, то *при произвольных достаточно больших* значениях n мы будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} & p(1, n-1) > p(n) > \\ & > p(1, 2, n-3) > p(1, 1, n-2) = p(2, n-2) > \\ & > p(1, 3, n-4) > p(3, n-3) > \\ & > p(1, 4, n-5) > p(4, n-4) > \\ & > p(5, n-5) > \\ & > p(6, n-6) > p(1, 1, 3, n-5) = p(2, 3, n-5) > \\ & > \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (65)$$

При этом расположение по строчкам таково, что вероятности, стоящие в первой строчке, асимптотически равны $\frac{1}{n}$, вероятности, стоящие во второй, асимптотически равны $\frac{1}{2n}$, стоящие в третьей, — $\frac{1}{3n}$ и т. д.

13. В выражении вероятности $p^{(n)}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}$ верхний значок n не является необходимым, так как он равен числу индексов α_r, стоящих в качестве нижних значков. Вместе с тем верхний значок n определяется через нижние по формуле, которой можно придать несколько менее определенный вид:

$$n = \sum r\alpha_r = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots \qquad (66)$$

* Возможна неопределенность в порядке классов, если несколько различных классов имеют равные вероятности.

** Таким образом, мы пишем здесь, например, $p(1, 1, 1, 2, 3, 3)$ вместо $p^{(6)}_{3,1,2}$,

считая $\alpha_r = 0$ при $r > n$: в перестановке из n элементов нет циклов с числом членов, превышающим n.

В дальнейшем мы изменим обозначение для вероятностей $p^{(n)}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}$ следующим образом: отбросим верхний значок и, замечая, кроме того, что добавление (или отбрасывание) одного или нескольких нижних значков, равных нулю, не изменяет значения вероятности, условимся выписывать нижние значки до последнего, отличного от нуля. Так, например, будем писать $p_{1,2}$ вместо $p^{(5)}_{1,2,0,0,0}$; $p_{1,0,2}$ будет обозначать то же, что и $p^{(7)}_{1,0,2,0,0,0,0}$. При этом p без всяких значков будем считать формально равным единице.

Введем в рассмотрение следующую *основную производящую функцию* переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, число которых ничем не ограничено:

$$F(x_1, x_2, x_3, \ldots) = e^{\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \ldots} = e^{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}}. \tag{67}$$

Легко понять, что вероятность $p_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}$ может быть определена как коэффициент при $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ в формальном разложении этой функции по степеням ее аргументов. Действительно, обозначая нуликом подстановку $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, производимую после дифференцирования, мы получаем:

$$\frac{1}{\alpha_1!\, \alpha_2! \ldots \alpha_n!} \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} F_0 = \frac{1}{\alpha_1!\, \alpha_2! \ldots \alpha_n!} \frac{1}{1^{\alpha_1} \cdot 2^{\alpha_2} \ldots n^{\alpha_n}},$$

что совпадает с правой частью формулы (57).

Таким образом,

$$F(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \sum p_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_\nu^{\alpha_\nu}; \tag{68}$$

суммирование производится здесь по всем конечным последовательностям целых неотрицательных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, из которых последнее отлично от нуля. Это условие в дальнейшем будет всегда сохраняться без особых оговорок.

Заметим, что, заменяя x_m через x^m $(m = 1, 2, \ldots)$, будем иметь:

$$F(x, x^2, x^3, \ldots) = e^{\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots} = e^{\log \frac{1}{1-x}} = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots$$

Итак, коэффициент при x^n в разложении функции $F(x, x^2, x^3, \ldots)$ по степеням x равен 1; так как этот коэффициент равен, с другой стороны, сумме коэффициентов при $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x^{\alpha_\nu}$ в разложении $F(x_1, x_2, x_3, \ldots)$,

распространенной на все последовательности $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, удовлетворяющие условию $\sum p_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu} = 1$, то отсюда следует равенство

$$\sum p_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu} = 1, \tag{69}$$

где суммирование подчинено условию $\sum r\alpha_r = n$. Это равенство можно было предвидеть и заранее, так как достоверно, что перестановка из n элементов принадлежит одному из единственно возможных и несовместных классов.

Укажем здесь удобный прием, который служит для систематического и, если можно так выразиться, коллективного вычисления вероятностей $p_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}$ при заданном значении $n\,(=\sum r\alpha_r)$.

Если сумму $\sum p_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_\nu^{\alpha_\nu}$, взятую с ограничением $\sum r\alpha_r = n$, обозначим через $F_n(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, то будем иметь тождество

$$F(tx_1, t^2x_2, t^3x_3, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} t^n F_n(x_1, x_2, x_3, \ldots), \tag{70}$$

откуда ясно, что $F_n(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ есть не что иное как коэффициент при t^n в разложении $F(tx_1, t^2x_2, t^3x_3, \ldots)$ по степеням t:

$$F_n(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dt^n} F(tx_1, t^2x_2, t^3x_3, \ldots)\big|_{t=0}.$$

Полагая

$$u = \sum \frac{x_n}{n} t^n, \qquad e^{-u}\frac{d^n}{dt^n} e^u = \Phi_n(u', u'', \ldots, u^{(n)}) \qquad \left(u^{(k)} = \frac{d^k u}{dt^k}\right),$$

мы строим $F_n(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ по схеме

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dt^n} F(tx_1, t^2x_2, t^3x_3, \ldots) = \frac{1}{n!}\{e^u \Phi_n(u', u'', \ldots, u^{(n)})\}_{t=0} =$$
$$= \frac{1}{n!}\Phi_n(0!\,x_1, 1!\,x_2, \ldots, (n-1)!\,x_n).$$

Затем все вероятности $p_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}$ можно будет получить как коэффициенты при $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ в полученном выражении для $F_n(x_1, x_2, \ldots)$.

Например, при $n = 4$

$$\Phi_4(u', u'', u''', u^{(4)}) = e^{-u}\frac{d^4}{dt^4} e^u = u^{(4)} + 4u'u''' + 3u''^2 + 6u'^2u'' + u'^4,$$

$$F_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{24}\Phi_4(x_1, x_2, 2x_3, 6x_4) =$$
$$= \frac{1}{24}(6x_4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 + 6x_1^2x_2 + x_1^4),$$

откуда следуют значения вероятностей $p^{(4)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$, приведенные в конце n° 11.

14. Перейдем к вопросу о распределении возможных значений *числа циклов $M^{(n)} = s$ в перестановках из n элементов.*

Вероятность $p_m^{(n)}$ того, что число циклов в перестановке из n элементов окажется равным m, представляется суммой вида $\sum_{(K_n, L_m)} p_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu}$, взятой с ограничениями

$$\sum r\alpha_r = n \quad (K_n) \quad \text{и} \quad \sum \alpha_r = m \quad (L_m).$$

Если в основной производящей функции сделаем замену $x_k = tx^k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, то получим

$$F(tx, tx^2, tx^3, \ldots) = \sum p_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu} t^{\Sigma\alpha_r} x^{\Sigma r\alpha_r} =$$
$$= \sum_{m, n} \left\{ \sum_{(K_n, L_m)} p_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu} \right\} t^m x^n = \sum_{m, n} p_m^{(n)} t^m x^n.$$

Отсюда ясно, что вероятность $p_m^{(n)}$ есть не что иное, как коэффициент при $t^m x^n$ в разложении функции

$$\psi(t, x) \equiv F(tx, tx^2, tx^3, \ldots),$$

так что

$$p_m^{(n)} = \frac{1}{m!\, n!} \frac{\partial^{m+n}}{\partial t^m \partial x^n} \psi(t, x) \Big|_{\substack{t=0 \\ x=0}}.$$

Но, согласно формуле (67),

$$F(tx, tx^2, tx^3, \ldots) = e^{t \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}} = (1 - x)^{-t},$$

и потому

$$\psi(t, x) = (1 - x)^{-t}. \tag{71}$$

Сравним в тождестве (71) коэффициенты при t^m:

$$\frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial t^m} \psi(t, x) \Big|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} p_m^{(n)} x^n = \frac{1}{m!} \log^m \frac{1}{1-x}. \tag{72}$$

Сравним в том же тождестве коэффициенты при x^n:

$$\frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \psi(t, x) \Big|_{x=0} = \sum_{m=0}^{\infty} p_m^{(n)} t^m = \frac{1}{n!} t(t+1)(t+2)\ldots(t+n-1). \tag{73}$$

Итак, вероятность $p_m^{(n)}$ может быть определена:

1) как коэффициент при $t^m x^n$ в разложении функции

$$\psi(t, x) \equiv (1 - x)^{-t}$$

по степеням t и x,

2) как коэффициент при x^n в разложении функции

$$\varphi_m(x) = \frac{1}{m!} \log^m \frac{1}{1-x}$$

по степеням x,

3) как коэффициент при t^m в разложении функции

$$P_n(t) = \frac{1}{n} t(t+1)\ldots(t+n-1) \tag{73'}$$

по степеням t.

Последнее определение приводит к удобному рекуррентному методу вычисления вероятностей p_m^n. Именно, сравнивая в тождестве

$$P_{n+1}(t) = \frac{t+n}{n+1} P_n(t)$$

коэффициенты при t^m, получим соотношение

$$p_m^{(n+1)} = \frac{n p_m^{(n)} + p_{m-1}^{(n)}}{n+1}, \qquad (74)$$

которому, полагая

$$\hat{p}_m^{(n)} = n! p_m^{(n)},$$

можно также придать вид:

$$\hat{p}_m^{(n+1)} = n\, \hat{p}_m^{(n)} + \hat{p}_{m-1}^{(n)}.$$

Из формулы (73) сразу видно что, $p_0^{(n)} = 0$, $p_n^{(n)} = \frac{1}{n!}$ и, следовательно, $\hat{p}_0^{(n)} = 0$, $\hat{p}_n^{(n)} = 1$.

Отсюда ясно, что числа $\hat{p}_m^{(n)}$ могут быть расположены в виде «треугольника Паскаля»

1

0 1

0 1 1

0 2 3 1

0 6 11 6 1

0 24 50 35 10 1

. . . .

и легко вычисляются с помощью одних только сложений и умножений на целые числа. Чтобы перейти от чисел $\hat{p}_m^{(n)}$, стоящих в n-ой строке, к числам $p_m^{(n)}$, достаточно разделить эту строку на $n!$

Рассматривая выписанные выше строки треугольника ($n \leqslant 5$), мы видим, что последовательные числа $p_m^{(n)}$ ($m = 0, 1, \ldots n$) связаны неравенствами вида

$$0 = p_0^{(n)} < p_1^{(n)} < p_2^{(n)} < \ldots < p_{\mu_n - 1}^{(n)} \leqslant p_{\mu_n}^{(n)} \geqslant p_{\mu_n+1}^{(n)} > \ldots > p_{n-1}^{(n)} > p_n^{(n)} = \frac{1}{n!},$$

причем знак равенства или вообще отсутствует или стоит лишь один раз, соединяя два числа наибольшей величины. Пользуясь соотношением (74), можно легко доказать, на основе метода полной индукции, что отмеченное свойство имеет место для любой строки треугольника.

Вычислить μ_n как функцию n, т. е. определить *наиболее вероятное число циклов* в перестановке из n элементов, представляется более сложной задачей. Заметим, что при $3 \leqslant n \leqslant 7$ $\mu_n = 2$, но при $n = 8$ μ_n уже равно 3. Это, конечно, нисколько не стоит в противоречии с результатом n° 12, поскольку наиболее вероятный «индивидуум» нисколько не обязательно содержится в наиболее вероятной «группе индивидуумов».

15. Вычислим *математическое ожидание* σ_n *и дисперсию* (среднее квадратическое отклонение) E_n числа циклов в перестановке из n элементов:

$$\sigma_n = \sum_{m=0}^{n} m p_m^{(n)}, \quad E_n = \sqrt{\sum_{m=0}^{n} p_m^{(n)} (m - \sigma_n)^2}.$$

Двукратное дифференцирование тождества

$$P_n(t) = \frac{1}{n!} t(t+1)\ldots(t+n-1) = \sum_{m=0}^{n} p_m^{(n)} t^m \tag{75}$$

дает

$$P_n'(t) = \frac{1}{n!} \frac{d}{dt} \{t(t+1)\ldots(t+n-1)\} = \sum_{m=0}^{n} m p_m^{(n)} t^{m-1}, \tag{76}$$

$$P_n''(t) = \frac{1}{n!} \frac{d^2}{dt^2} \{t(t+1)\ldots(t+n-1)\} = \sum_{m=0}^{n} m(m-1) p_m^{(n)} t^{m-2}. \tag{77}$$

В результате подстановки значения $t = 1$ в равенства (75), (76) и (77) получается:

1) тривиальное соотношение, выражающее, что появление некоторого числа циклов в перестановке есть событие достоверное: $\sum_{m=0}^{n} p_m^{(n)} = 1$,

2) формула для математического ожидания числа циклов в перестановке из n элементов:

$$\sigma_n = P_n'(1) = \sum_{m=0}^{n} m p_m^{(n)} = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} = H_n, \tag{78}$$

3) формула

$$\sum_{m=0}^{n} m(m-1) p_m^{(n)} = P_n''(1) = 2 \sum_{\substack{1 \ldots n \\ m' < m''}} \frac{1}{m' m''} = H_n^2 - \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^2}. \tag{79}$$

Складывая (78) и (79), мы будем иметь

$$\sum_{m=0}^{n} m^2 p_m^{(n)} = H_n^2 + H_n - \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^2},$$

и далее

$$E_n^2 = \sum_{m=0}^{n} m^2 p_m^{(n)} - 2\sigma_n \sum_{m=0}^{n} m p_m^{(n)} + \sigma_n^2 \sum_{m=0}^{n} p_m^{(n)} = H_n - \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^2}. \tag{80}$$

Переходя к асимптотическим равенствам, получаем для σ_n и E_n следующие значения:

$$\sigma_n = \log n + \gamma + o(1), \tag{81}$$

$$E_n = \sqrt{\log n} - \left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{\gamma}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{\log n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\log n}}\right), \tag{82}$$

где γ — эйлерова постоянная.

16. Чтобы установить *предельный закон распределения числа циклов в перестановках из* n элементов, мы (обозначая это число через $M_{(n)}$) составим характеристическую функцию нормированной величины $\frac{M^{(n)}-\sigma_n}{E_n\sqrt{2}}$:

$$\Phi_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, dF_n(x),$$

где $F_n(x)$ — закон распределения величины $\frac{M^{(n)}-\sigma_n}{E_n\sqrt{2}}$. Мы получаем (как в n° 6)

$$\Phi_n(t) = e^{-\frac{it\sigma_n}{E_n\sqrt{2}}} P_n\left(e^{\frac{it}{E_n\sqrt{2}}}\right),$$

причем P_n — многочлен, определяемый формулой (73′) n° 14. Его можно выразить также через функцию Г:

$$P_n(t) = \frac{\Gamma(n+t)}{\Gamma(t)\,\Gamma(n+1)};$$

после этого характеристическая функция $\Phi_n(t)$ принимает вид

$$\Phi_n(t) = e^{-\frac{it\sigma_n}{E_n\sqrt{2}}} \cdot \frac{\Gamma\left(n+e^{\frac{it}{E_n\sqrt{2}}}\right)}{\Gamma\left(e^{\frac{it}{E_n\sqrt{2}}}\right)\Gamma(n+1)}.$$

Полагая для краткости

$$e^{\frac{it}{E_n\sqrt{2}}} = 1+\varepsilon_n, \quad \text{где} \quad \varepsilon_n = \frac{it}{E_n\sqrt{2}} - \frac{t^2}{4E_n^2} + O\left(\frac{1}{E_n^3}\right) \tag{83}$$

получим, пользуясь формулой Стирлинга,

$$\log\frac{\Gamma\left(n+e^{\frac{it}{E_n\sqrt{2}}}\right)}{\Gamma(n+1)} = \log\frac{\Gamma(n+1+\varepsilon_n)}{\Gamma(n+1)} =$$

$$= \left\{(n+\varepsilon_n)\log(n+\varepsilon_n) - (n+\varepsilon_n) + \frac{1}{2}\log 2\pi(n+\varepsilon_n)\right\} -$$

$$- \left\{n\log n - n + \frac{1}{2}\log 2\pi n\right\} + o(1) = \varepsilon_n \log n + o(1) =$$

$$= \left[\frac{it}{E_n\sqrt{2}} - \frac{t^2}{4E_n^2} + O\left(\frac{1}{E_n^3}\right)\right]\log n + o(1) =$$

$$= \left[\frac{it}{\sqrt{2\log n}} - \frac{t^2}{4\log n} + O\left(\frac{1}{\log^{3/2} n}\right)\right]\log n + o(1) = \frac{it}{\sqrt{2}}\sqrt{\log n} - \frac{t^2}{4} + o(1),$$

и так как, с другой стороны,

$$\lim_{n\to\infty}\Gamma\left(e^{\frac{it}{E_n\sqrt{2}}}\right) = 1, \qquad \frac{it\sigma_n}{E_n\sqrt{2}} = \frac{it}{\sqrt{2}}\sqrt{\log n} + o(1),$$

то, окончательно,

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n(t) = \lim_{n\to\infty} e^{-\left(\frac{it}{\sqrt{2}}\sqrt{\log n}+o(1)\right)} \cdot e^{\frac{it}{\sqrt{2}}\sqrt{\log n} - \frac{t^2}{4} + o(1)} = e^{-\frac{t^2}{4}}.$$

Таким образом, интересующий нас предельный закон — гауссов.

17. Условимся понимать под длиною цикла отношение $\frac{m}{n}$ числа элементов в цикле к числу всех элементов в перестановке. В таком случае естественно назвать средней длиной циклов в перестановке среднюю арифметическую длин всех циклов

$$l = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}\frac{m_i}{n} = \frac{1}{s},$$

т. е. величину, обратную числу циклов.

Так как закон распределения числа циклов в пределе — гауссов, с бесконечно большой мерой точности, то можно предвидеть заранее, что таким же в пределе будет и закон распределения средней длины циклов. Можно также предвидеть, что математическое ожидание средней длины циклов асимптотически равно $\frac{n}{\log n}$.

Мы вычислим здесь точное значение математического ожидания λ_n средней длины циклов в перестановке из n элементов.

Согласно определению математического ожидания,

$$\lambda_n = n\sum_{m=1}^{n}\frac{p_m^{(n)}}{m}.$$

Деля формулу

$$\sum_{m=0}^{n} p_m^{(n)} t^m = P_n(t)$$

на t и затем интегрируя по t в пределах от 0 до t, мы получаем

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{p_m^{(n)}}{m}t^m = \int_0^t \frac{P_n(t)}{t}\,dt = \frac{1}{n!}\int_0^t (t+1)(t+2)\ldots(t+n-1)\,dt.$$

Остается положить $t=1$ и умножить на n, тогда

$$\lambda_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 (t+1)(t+2)\ldots(t+n-1)\,dt. \qquad (84)$$

Этой формуле можно придать также вид

$$\lambda_n = \int_0^1 \frac{\Gamma(n+t)}{\Gamma(n)\,\Gamma(t+1)}\,dt.$$

Применение формулы Стирлинга позволяет перейти к асимптотическому значению λ_n:

$$\lambda_n \sim \int_0^1 \frac{n^t}{\Gamma(t+1)}\,dt \sim \frac{1}{\Gamma(2)}\int_0^1 n^t dt = \frac{n-1}{\log n} \sim \frac{n}{\log n}. \qquad (85)$$

18. Вычислим вероятность того, что в перестановке из n элементов окажется m_1 r_1-членных циклов, m_2 r_2-членных циклов и т. д., наконец,

m_k r_k-членных циклов $(1 \leqslant r_1 < r_2 < \ldots < r_k \leqslant n;\ 0 \leqslant m_i < n;\ \sigma = \sum_{i=1}^{k} m_i r_i \leqslant n)$.

Обозначим эту вероятность через $p^{(n)}\begin{pmatrix} r_1, & r_2, & \ldots, & r_k \\ m_1, & m_2, & \ldots, & m_k \end{pmatrix}$. Легко понять: что она равна сумме $\sum p_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu}$, взятой с ограничениями

(1) $\alpha_{r_1} = m_1 (\alpha_{r_2} = m_2, \ldots, \alpha_{r_k} = m_k)$.

(2) $\sum r\alpha_r = n$.

Такая сумма может быть составлена в результате последовательного выполнения двух операций:

1) в основной производящей функции F соберем все члены, для которых удовлетворяются k условий (1); с этой целью вычислим коэффициент при $x_{r_1}^{m_1} x_{r_2}^{m_2} \ldots x_{r_k}^{m_k}$ (считая все прочие x_ν постоянными) и умножим его на $x_{r_1}^{m_1} x_{r_2}^{m_2} \ldots x_{r_k}^{m_k}$ — получится некоторая функция от переменных x_ν

$$\varphi\begin{pmatrix} r_1, r_2, \ldots r_k \\ m_1, m_2 \ldots, m_k \end{pmatrix}; x_1, x_2, \ldots \Big) =$$

$$= \frac{x_{r_1}^{m_1} x_{r_2}^{m_2} \ldots x_{r_k}^{m_k}}{m_1!\, m_2! \ldots m_k!} \left\{ \frac{\partial^{m_1+m_2+\ldots+m_k}}{\partial^{m_1} x_{r_1} \partial^{m_2} x_{r_2} \cdots \partial^{m_k} x_{r_k}} F(x_1, x_2, \ldots) \right\}_{\substack{x_{r_1}=0 \\ \ldots\ldots \\ x_{r_k}=0}}$$

2) затем сделаем замену $x_\nu = x^\nu$ и выделим коэффициент при x^n:

$$p^{(n)}\begin{pmatrix} r_1, r_2, \ldots, r_k \\ m_1, m_2, \ldots, m_k \end{pmatrix} = \frac{1}{n!}\left\{ \frac{d^n}{dx^n} \varphi\begin{pmatrix} r_1, r_2, \ldots, r_k \\ m_1, m_2, \ldots, m_k \end{pmatrix}; x, x^2, x^3, \ldots \Big) \right\}_{x=0}.$$

Выполняя фактически указанный план действий по отношению к функции $F = e^{\sum \frac{x_\nu}{\nu}}$, мы получаем, во-первых,

$$\varphi\begin{pmatrix} r_1, r_2, \ldots, r_k \\ m_1, m_2, \ldots, m_k \end{pmatrix}; x_1, x_2, \ldots \Big) =$$

$$= \frac{1}{m_1!\, m_2! \ldots m_k!} \left(\frac{x_{r_1}}{r_1}\right)^{m_1} \left(\frac{x_{r_2}}{r_2}\right)^{m_2} \ldots \left(\frac{x_{r_k}}{r_k}\right)^{m_2} e^{\sum\limits_{(r_1, \ldots, r_k)} \frac{x_\nu}{\nu}},$$

причем скобки под знаком суммы обозначают, что при суммировании значения ν, равные $r_1, r_2, \ldots, r_k$, должны быть опущены; во-вторых,

$$\varphi\begin{pmatrix} r_1, r_2, \ldots, r_k \\ m_1, m_2, \ldots, m_k \end{pmatrix}; x, x^2, x^3, \ldots \Big) = \frac{1}{m_1!\, m_2! \ldots m_k!} \frac{x^\sigma}{r_1^{m_1} r_2^{m_2} \ldots r_k^{m_k}} \frac{1}{1-x} e^{-\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{x^{r_i}}{r_i}} *$$

и далее

$$p^{(n)}\begin{pmatrix} r_1, r_2, \ldots r_k \\ m_1, m_2, \ldots m_k \end{pmatrix} = \frac{1}{m_1!\, m_2! \ldots m_k!} \frac{1}{r_1^{m_1} r_2^{m_2} \ldots r_k^{m_k}} \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^n}{dx^n} \frac{x^\sigma}{1-x} e^{-\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{x^{r_i}}{r_i}} \right\}_{x=0}. \quad (86)$$

Заметим, что, в частности, при условии $\sigma = \sum_{i=1}^{k} m_i r_i = n$ получаем, возвращаясь к обозначениям n°11:

---

* В самом деле,

$$\sum_{(r_1, \ldots, r_k)} \frac{x^\nu}{\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu} - \sum_{i=1}^{k} \frac{x^{r_1}}{r_1} = \log \frac{1}{1-x} - \sum_{i=1}^{k} \frac{x^{r_i}}{r_i}.$$

$$p^{(n)}\begin{pmatrix} r_1, r_2, \ldots, r_k \\ m_1, m_2, \ldots, m_k \end{pmatrix} = p^{(n)}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}$$

$$\alpha^{\nu} = \begin{cases} m_i & \text{если } \nu = r_i, \\ 0 & \text{если } \nu \text{ не равно ни одному из чисел } r_i. \end{cases}$$

При этом формула (86) превращается в формулу (57) n° 11, так как в сумме, стоящей в показателе, нужно считать фигурирующими в качестве r_i все целые положительные числа.

Таким образом, вероятности $p^{(n)}\begin{pmatrix} r_1, r_2, \ldots, r_k \\ m_1, m_2, \ldots, m_k \end{pmatrix}$ будут коэффициентами при $x^{(n)}$ в разложении производящей функции

$$\varphi\begin{pmatrix} r_1, r_2, \ldots, r_k \\ m_1, m_2, \ldots, m_k \end{pmatrix}; x \Big) = \varphi\begin{pmatrix} r_1, r_2, \ldots, r_k \\ m_1, m_2, \ldots, m_k \end{pmatrix}; x, x^2, x^3, \ldots \Big)$$

по степеням x

$$\varphi\left(\begin{matrix} r_1, r_2, \ldots, r_k \\ m_1, m_2, \ldots, m_k \end{matrix}; x\right) = \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{k} m_i!} \cdot \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{k} r_i^{m_i}} \frac{x^{\sigma}}{1-x} e^{-\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{x^{r_i}}{r_i}}. \tag{87}$$

Сама функция $\varphi\left(\begin{matrix} r_1, r_2, \ldots, r_k \\ m_1, m_2, \ldots, m_k \end{matrix}; x\right)$ будет коэффициентом при $t_1^{m_1} t_2^{m_2} \ldots t_k^{m_k}$ в разложении функции

$$\psi(r_1, r_2, \ldots, r_k; t_1, t_2, \ldots, t_k; x) = \frac{1}{1-x} e^{\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{(t_i-1) x^{r_i}}{r_i}} \tag{88}$$

по степеням переменных t_i. Действительно, легко проверить, что

$$\frac{1}{m_1! \ldots m_k!} \left\{ \frac{\partial^{m_1+m_2+\ldots m_k}}{\partial t_1^{m_1} \partial t_2^{m_2} \ldots \partial t_k^{m_k}} \psi(r_1, \ldots; r_k; t_1, \ldots, t_k; x) \right\}_{t_i=0} = \varphi\left(\begin{matrix} r_1, r_2, \ldots, r_k \\ m_1, m_2, \ldots, m_k \end{matrix}; x\right),$$

откуда

$$\psi(r_1, r_2, \ldots, r_k; t_1, t_2, \ldots, t_k; x) = \sum_{m_1, \ldots, m_k}^{0 \ldots \infty} \varphi\left(\begin{matrix} r_1, r_2, \ldots, r_k \\ m_1, m_2, \ldots, m_k \end{matrix}; x\right) t_1^{m_1} t_2^{m_2} \ldots t_k^{m_k} =$$

$$= \sum_{m_1 \ldots m_k}^{0 \ldots \infty} \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}\begin{pmatrix} r_1, r_2, \ldots, r_k \\ m_1, m_2, \ldots, m_k \end{pmatrix} t_1^{m_1} t_2^{m} \ldots t_k^{m_k} x^n.$$

Рассмотрим более подробно случай, когда $k = 1$, т. е. сосредоточим внимание на распределении числа циклов данного порядка r в перестановке из n элементов. В этом случае

$$\psi(r;\ t;\ x) = \frac{1}{1-x} e^{\frac{(t-1)x^r}{r}} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}\begin{pmatrix} r \\ m \end{pmatrix} t^m x^n, \tag{89}$$

$$\varphi\left(\begin{matrix} r \\ m \end{matrix};\ x\right) = \frac{1}{m!} \frac{x^{mr}}{r^m} \frac{1}{1-x} e^{-\frac{x^r}{r}} = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}\begin{pmatrix} r \\ m \end{pmatrix} x^n. \tag{90}$$

Разложение по степеням x дает

$$\frac{1}{1-x}e^{\frac{(t-1)x^r}{r}}=\sum_{\lambda=0}^{\infty}x^{\lambda}\cdot\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{1}{\mu!}\left(\frac{(t-1)x^r}{r}\right)^{\mu}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sum_{\lambda+\mu r=n}\frac{1}{\mu!}\left(\frac{t-1}{r}\right)^{\mu}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\left[\frac{n}{r}\right]}\frac{1}{\mu!}\left(\frac{t-1}{r}\right)^{\mu}=\sum_{n=0}^{\infty}e_{\left[\frac{n}{r}\right]}\left(\frac{t-1}{r}\right)x^n,$$

где $[u]$ — наибольшее целое число, не превышающее u, и $e_s(x)=\sum_{\nu=0}^{s}\frac{x^{\nu}}{\nu!}$. Итак,

$$\psi(r;\ t;\ x)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(r,\ t)\,x^n, \tag{91}$$

причем функция

$$P_n(r,\ t)=\sum_{m=1}^{\infty}p^{(n)}\binom{r}{m}t^m=e_{\left[\frac{n}{r}\right]}\left(\frac{t-1}{r}\right) \tag{92}$$

есть полином относительно t степени $\left[\frac{n}{r}\right]$, т. е. во всяком случае не выше n.

Таким образом, вероятность того, что в перестановке из n элементов имеется m r-членных циклов, равна коэффициенту при t^m в разложении полинома $P_n(r,\ t)$ по степеням t. Это — наиболее удобный способ вычисления вероятности $p^{(n)}\binom{r}{m}$.

Например, закон распределения 4-членных циклов в перестановке из 15 элементов характеризуется производящим полиномом с неотрицательными коэффициентами

$$P_{15}(4,\ t)=\sum_{m=0}^{3}p^{(15)}\binom{4}{m}t^m=e_3\left(\frac{t-1}{4}\right)=1+\frac{1}{1!}\frac{t-1}{4}+$$
$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{t-1}{4}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{t-1}{4}\right)^3,$$

откуда

$$p^{(15)}\binom{4}{0}=\frac{299}{384},\quad p^{(15)}\binom{4}{1}=\frac{75}{384},\quad p^{(15)}\binom{4}{2}=\frac{9}{384},\quad p^{(15)}\binom{4}{3}=\frac{1}{384}.$$

Принимая во внимание, что $e'_n(x)=e_{n-1}(x)$, получаем для $p^{(n)}\binom{r}{m}$ следующую общую формулу:

$$p^{(n)}\binom{r}{m}=\frac{1}{m!}\left\{\frac{d^m}{dt^m}e_{\left[\frac{n}{r}\right]}\left(\frac{t-1}{r}\right)\right\}_{t=0}=\frac{1}{m!}\frac{1}{r^m}e_{\left[\frac{n}{r}\right]-m}\left(-\frac{1}{r}\right).$$

Чтобы выяснить характер изменения $p^{(n)}\binom{r}{m}$ при возрастании m от 0

до n, рассмотрим отношение

$$\delta^n \binom{r}{m} = \frac{p^{(n)}\binom{r}{m+1}}{p^n\binom{r}{m}} = \frac{1}{m+1}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{e_{s-1}\left(-\frac{1}{r}\right)}{e_s\left(-\frac{1}{r}\right)} =$$

$$= \frac{1}{m+1}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{1+\left(-\frac{1}{r}\right)^s\cdot\frac{1}{s!\,e_{s-1}\left(-\frac{1}{r}\right)}},$$

где положено $s = \left[\frac{n}{r}\right] - m$.

Оставляя пока в стороне случай, когда одновременно $s=2$ и $r=1$, заметим, что $e_{s-1}\left(-\frac{1}{r}\right) > 0$ и потому отношение $\delta^n\binom{r}{m}$ наверное меньше единицы при всех *четных* значениях s. С другой стороны, так как при любых значениях $s \geqslant 3$ имеем $s!\,e_{s-1}\left(-\frac{1}{r}\right) \geqslant s!\,e_{s-1}(-1) \geqslant 3$, то при $r \geqslant 2$

$$\delta^{(n)}\binom{r}{m} \leqslant \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3r^s}} \leqslant \frac{1}{r}\,\frac{1}{1-\frac{1}{3r^3}} \leqslant \frac{12}{23} < 1.$$

Если $s=1$ и $r \geqslant 2$, то

$$\delta^{(n)}\binom{r}{m} = \frac{1}{m+1}\cdot\frac{1}{r-1} \leqslant \frac{1}{m+1} \leqslant 1,$$

причем равенство возможно лишь при условии $r=2$ и $m=0$. При $r=1$ и s нечетном >1 имеем опять-таки $\delta^{(n)}\binom{r}{m} < 1$, если $m > 0$, но $\delta^{(n)}\binom{r}{m} > 1$ при $m=0$. При $r=1$ и $s=2$, $\delta^{(n)}\binom{r}{m} = 0$. Наконец, при $r=1$, $s=1$, $p^n\binom{r}{m} = 0$, и $\delta^{(n)}\binom{r}{m}$ лишено смысла.

Из предыдущего видно, что при $r \geqslant 2$ числа $p^{(n)}\binom{r}{m}$ неизменно убывают с возрастанием m, так что наивероятнейшим числом r-членных циклов является *нуль*. Исключение составят *двучленные* циклы, поскольку при $r=2$ $p^{(n)}\binom{2}{0} = p^{(n)}\binom{2}{1}$ для $n=2$ и $n=3$. Что касается одночленных циклов, то для них исключительным окажется случай $m=0$, именно, при *нечетных* значениях $p^{(n)}\binom{1}{0} < p^{(n)}\binom{1}{1} = e_{n-1}(-1)$; кроме того, при $m=n-1$ получается $p^{(n)}\binom{1}{n-1} = 0$, тогда как $p^{(n)}\binom{1}{n} = \frac{1}{n!}$. Таким образом, наивероятнейшее число одночленных циклов равно 1 (кроме случая $n=2$). Не лишено интереса заметить, что $p^{(n)}\binom{1}{n-2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n-2)!}$, так что $p^{(n)}\binom{1}{n-2} > p^{(n)}\binom{1}{n}$.

Математическое ожидание $\sigma_n(r)$ числа r-членных циклов в перестановке из n элементов вычисляется следующим образом:

$$\sigma_n(r)=\sum_{m=0}^{n} m p^{(n)}\binom{r}{m}=P_n'(r,1)=\left\{\frac{d}{dt}e_{\left[\frac{n}{r}\right]}\left(\frac{t-1}{r}\right)\right\}_{t=1}=$$
$$=\frac{1}{r}e_{\left[\frac{n}{r}\right]-1}(0)=\frac{1}{r}\qquad (r=1,2,\ldots). \qquad (93)$$

Сопоставляя с формулой (78) n° 15, видим, как и следовало ожидать, что

$$\sigma_n=\sum_{r=1}^{n}\sigma_n(r).$$

Подобным же образом легко вычислить и дисперсию $E_n(r)$ числа r-членных циклов:

$$\sum_{m=0}^{n} m(m-1)\,p_m^{(n)}(r)=P_n''(r,1)=\frac{1}{r^2},\quad \sum_{m=0}^{n} m^2 p_m^{(n)}(r)=\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r},$$

$$E_n^2(r)=\sum_{m=0}^{n} p_m^{(n)}(r)\,(m-\sigma_n(r))^2=\frac{1}{r},\qquad E_n(r)=\frac{1}{\sqrt{r}} \qquad (94)$$

Замечательно, что $\sigma_n(r)$ и $E_n(r)$ не зависят от n.

Наконец, интересно обратить внимание на то обстоятельство, что при неограниченном возрастании n закон распределения r-членных циклов в пределе переходит в *закон Пуассона*, с тем же неизменным математическим ожиданием $\frac{1}{r}$. В самом деле,

$$\lim_{n\to\infty}P_n(r,t)=\lim_{n\to\infty}e_{\left[\frac{n}{r}\right]}\left(\frac{t-1}{r}\right)=e^{\frac{t-1}{r}},$$

$$\lim_{n\to\infty}p^{(n)}\binom{r}{m}=\frac{1}{m!}\frac{1}{r^m}\lim_{n\to\infty}e_{\left[\frac{n}{r}\right]-m}\left(-\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{m!}\frac{1}{r^m}e^{-\frac{1}{r}}\qquad (m=0,1,2,\ldots).$$

Например, предельная вероятность того, что не будет *ни одного r-членного цикла*, равна

$$\lim_{n\to\infty}p^{(n)}\binom{r}{0}=e^{-\frac{1}{r}}.$$

В частности, вероятность того, что не будет *ни одного одночленного цикла*, т. е. того, что все элементы меняют свои места, стремится к пределу

$$\lim_{n\to\infty}p^{(n)}\binom{1}{0}=\frac{1}{e}.$$

19. Пусть перестановка разбивается на s циклов, состоящих соответственно из $m_1, m_2, \ldots, m_s$ членов. Рассмотрим длину максимального цикла

$$\mu^{(n)} = \frac{1}{n} \max\{m_1, m_2, \ldots, m_s\}.$$

Установим, что ее закон распределения при $n \to \infty$ стремится к некоторому предельному закону, который обозначим через $\varphi(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$; постараемся его вычислить. Обозначим через $\Pi_m^{(n)}$ вероятность того, что $\mu^{(n)} < m$. Пусть $\left[\frac{n}{m}\right] = \lambda$, так что

$$\frac{1}{\lambda+1} < \frac{m}{n} \leqslant \frac{1}{\lambda} \quad (\lambda \geqslant 1).$$

Чтобы вычислить $\Pi_m^{(n)}$ заметим, что $\Pi_m^{(n)}$ равно сумме $\sum\limits_{(K_n,\, N_m)} p_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots}$, взятой с ограничениями

$$\sum r\alpha_r = n \quad (K_n) \text{ и } \alpha_m = \alpha_{m+1} = \ldots = 0 \quad (N_m).$$

Отсюда ясно, что для получения $\Pi_m^{(n)}$ достаточно в производящую функцию, которая раньше (n° 13) была обозначена через $F_n(x_1, x_2, \ldots)$, вместо x_k подставить 1 при $k \leqslant m-1$ и 0 при $k \geqslant m$. Но $F_n(x_1, x_2, \ldots)$ есть коэффициент при t^n в разложении $F(tx_1, t^2x_2, \ldots)$; таким образом, можно, меняя порядок действий, сначала подставить в $F(tx_1, t^2x_2, \ldots)$ указанные значения x_k, потом взять коэффициент при t^n. Итак, $\Pi_m^{(n)}$ есть коэффициент при t^n в разложении функции

$$F(t, t^2, \ldots, t^{m-1}; 0, 0 \ldots) = e^{\sum\limits_{\nu=1}^{m-1} \frac{t^\nu}{\nu}} = \frac{1}{1-t} e^{-\sum\limits_{\nu=m}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu}} =$$

$$= (1 + t + t^2 + \ldots)\left(1 - \frac{1}{1!} \sum_{\nu_1=m}^{\infty} \frac{t^{\nu_1}}{\nu_1} + \frac{1}{2!} \sum_{\nu_1=m}^{\infty} \sum_{\nu_2=m}^{\infty} \frac{t^{\nu_1}}{\nu_1} \frac{t^{\nu_2}}{\nu_2} - \ldots\right).$$

Отсюда легко заключаем, что

$$\Pi_m^{(n)} = 1 - \frac{1}{1!} \sum_{\nu_1=m}^{n} \frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{2!} \sum_{\substack{\nu_1, \nu_2 \geqslant m \\ \nu_1+\nu_2 \leqslant n}}\sum \frac{1}{\nu_1\nu_2} - \ldots + \frac{(-1)^h}{h!} \sum_{\substack{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_h \geqslant m \\ \nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_h \leqslant n}} \cdots \sum \frac{1}{\nu_1\nu_2 \ldots \nu_h} + \ldots$$

Полученный ряд обрывается автоматически на λ-м члене, так как при $h \geqslant \lambda+1$ из $\nu_i \geqslant m$ следует $\sum \nu_i \geqslant (\lambda+1)m > n$, так что сумма, образующая соответствующий член, — пустая.

Вводя обозначения

$$S_0(m, n) = 1, \quad S_h(m, n) = \sum_{\substack{\nu_i \geqslant m \\ \Sigma\nu_i \leqslant n}} \cdots \sum \frac{1}{\nu_1 \ldots \nu_h} \quad (h \geqslant 1),$$

можно написать более кратко

$$\Pi_m^{(n)} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!} S_h(m, n).$$

Пусть числа x' и x'' удовлетворяют неравенству $\frac{1}{\lambda+1} \leqslant x' < x'' < \frac{1}{\lambda}$. Тогда вероятность неравенства $x' < \mu^{(n)} < x''$ при $n \to \infty$ асимптотически равна

$$\Pi_{[nx'']}^{(n)} - \Pi_{[nx']}^{(n)} = \sum_{h=0}^{\lambda} \frac{(-1)^h}{h!} \{S_h([nx''], n) - S_h([nx'], n)\}.$$

Если m и n неограниченно возрастают таким образом, что их отношение остается заключенным между постоянными пределами, то, как легко понять,

$$S_h(m, n) \sim I_h(m, n),$$

где положено

$$I_0(m, n) = 1, \quad I_h(m, n) = \int\limits_{\substack{x_i > m \\ \Sigma x_i < n}} \cdots \int \frac{dx_1 \ldots dx_h}{x_1 \ldots x_h} \quad (h \geqslant 1).$$

Принимая во внимание, что интегралы $I_h(m, n)$ обладают свойством однородности

$$I_h(tm, tn) = I_h(m, n),$$

заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \text{Вер}\{x' < \mu^{(n)} < x''\} = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!} \{I_h(x'', 1) - I_h(x', 1)\}.$$

Положив $x' = \frac{1}{\lambda+1}$ и заменяя x'' через x, получим аналитическое выражение для предельного закона в интегральной форме:

$$\Phi(x) = \lim_{n\to\infty} \text{Вер}\left\{\frac{1}{\lambda+1} < \mu^{(n)} < x\right\} = \sum_{h=1}^{\lambda} \frac{(-1)^h}{h!} \left\{I_h(x, 1) - I_h\left(\frac{1}{\lambda+1}, 1\right)\right\}$$
$$\left(\frac{1}{\lambda+1} \leqslant x \leqslant \frac{1}{\lambda}; \quad \lambda = 1, 2, \ldots\right).$$

Чтобы получить предельный закон в дифференциальной форме, остается взять производную. Так как

$$\frac{d}{dx} I_h(x, 1) = -\frac{h}{x} I_{h-1}(x, 1-x), \tag{95}$$

то

$$\varphi(x) = \Phi'(x) = -\frac{1}{x} \sum_{h=1}^{\lambda} \frac{(-1)^h}{(h-1)!} I_{h-1}(x, 1-x) = \frac{1}{x} \sum_{h=0}^{\lambda-1} \frac{(-1)^h}{h!} I_h(x, 1-x)$$
$$\left(\frac{1}{\lambda+1} \leqslant x \leqslant \frac{1}{\lambda}; \quad \lambda = 1, 2, \ldots\right). \tag{96}$$

Таким образом, закон распределения $\varphi(x)$ составляется из бесконечного множества аналитических дуг:

$$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & \text{при } \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\\ \frac{1}{x}(1-I_1(x,1-x))=\frac{1}{x}\left(1-\log\frac{1-x}{x}\right) & \text{при } \frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\\ \frac{1}{x}(1-I_1(x,1-x)+\frac{1}{2}I_2(x,1-x)\ldots-) & \text{при } \frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{1}{3},\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\end{cases}$$

Поступило
6. II. 1943

V. GONTCHAROFF. DU DOMAINE DE L'ANALYSE COMBINATOIRE

RÉSUMÉ

La méthode classique des fonctions-génératrices (convenablement étendue suivant le cas) se laisse appliquer à l'étude des phénomènes que l'on observe dans certaines suites de nombres ou de signes quelconques. Ici, nous nous proposons seulement à considérer deux exemples: 1° l'alternation des séries dans les suites des événements correspondants au schéma de Bernoulli et 2° la distribution des cycles dans les permutations formées d'éléments de nature arbitraire.

1° Soit p la probabilité de l'événement A, q la probabilité de l'événement contraire B $(p+q=1; 0<p, q<1)$. Envisageons une suite d'épreuves; on obtient une «A-série à r termes» tant que l'événement A se produit r fois de suite (précisément); d'une manière analogue, pour une «B-série à s termes». Soit enfin n le nombre d'épreuves qu'on a faites.

Les variables aléatoires que nous avons à étudier sont le nombre α_r des A-séries à r termes, le nombre β_s des B-séries à s termes et le nombre γ_t des A-séries et des B-séries à t termes $(r, s, t=1, 2, \ldots, n;$ $\sum_r r\alpha_r+\sum_s s\beta_s=n;$ $\gamma_t=\alpha_t+\beta_t;$ $\sum_t \gamma_t=n)$; ensuite le nombre $\sum_r \alpha_r$ de toutes les A-séries et le nombre $\sum_s \beta_s$ de toutes les B-séries ainsi que le nombre $\sum_r \alpha_r+\sum_s \beta_s$ de toutes les séries obtenues; enfin, la longueur (le nombre des termes) S de la plus grande A-série.

En designant, en général, par $\sigma_n(x)\equiv\sigma(x)$ et par $E_n(x)\equiv E(x)$ respectivement la valeur moyenne et l'écart moyen carré d'une variable x dans une suite de n épreuves, on obtient les formules:

$$\sigma(\alpha_r)=\begin{cases}p^r & (n=r).\\ p^rq\,[(n-r+1)\,q+2p] & (n>r),\end{cases}$$

$$\sigma(\beta_s)=\begin{cases}q^s & (n=s),\\ q^sp\,[(n-s+1)\,p+2q] & n>s),\end{cases}$$

donc

$$\sigma\Big(\sum_r \alpha_r\Big) = \sum_r \sigma(\alpha_r) = p\,(nq+p), \quad \sigma\Big(\sum_s \beta_s\Big) = \sum_s \sigma(\beta_s) = q\,(np+q),$$

$$\sigma\Big(\sum_r \alpha_r + \sum_s \beta_s\Big) = 2npq + (p^2+q^2);$$

et, d'autre part,

$$\sigma(\gamma_t) = \sigma(\alpha_t) + \sigma(\beta_t) = \begin{cases} s_t & (n=t) \\ K_1 n + K_0 & (n>t) \end{cases}$$

où l'on a posé

$$s_t = p^t + q^t \quad (t=1,2,\ldots).$$

$$K_1 = pq\,(s_{t-1} - s_t), \quad K_0 = pq\,[(t+1)\,s_{t+1} - (t-1)\,s_{t-1}].$$

Quant à l'écart moyen carré, il résulte:

$$E^2(\alpha_r) = \begin{cases} p^r(1-p^r) & (n=r) \\ p^r q\,[(n-r+1)\,q + 2p]\,\{1 - p^r q\,[(n-r+1)\,q+2p]\} & (r<n<2r) \\ \text{même expression } + 2p^{2r}q & (n=2r+1) \end{cases}$$

et enfin, si l'on a $n > 2r+1$, $E^2(\alpha_r)$ est égal à

$$p^{2r}q^2\,\{[2p-(2r+1)\,q]\,qn + [2p^2 - 4\,(2r+1)\,pq + (3r^2-1)\,q^2]\} +$$

$$+ p^r q\{qn + [2p-(r-1)q]\} \qquad \text{(formule analogue pour } E^2(\beta_s)\text{)}.$$

Ensuite

$$E^2(\gamma_t) = \begin{cases} s_t - s_t^2 & (n-t) \\ (K_1 n + K_0) - (K_1 n - K_0)^2 & (t<n<2t) \\ \text{même expression } + 4p^t q^t & (n=2t) \\ \text{même expression } + 2\,(pq s_{t-1}\,s_t + p^t q^t) & (n=2t+1) \end{cases}$$

et enfin, si l'on a $n > 2t+1$, $E^2(\gamma_t)$ est égal à $M_1 n + M_0$, où l'on a posé:

$$M_1 = p^2q^2\,\{-(2t+1)\,s_{t-1}^2 + 4\,(t+1)\,s_{t-1}s_t - (2t+3)\,s_t^2\} +$$
$$+ pq\,(s_{t-1} - s_t) + 2p^{t+1}q^{t+1},$$
$$M_0 = pq\,\{3\,(t^2-1)\,pqs_{t-1}^2 + 2\,[1-(t+1)\,(3t+1)\,pq]\,s_{t-1}s_t -$$
$$- [2-(t+1)\,(3t+5)\,pq]\,s_t^2\} + 2p^tq^t - 4t\,p^{t+1}q^{t+1};$$

et encore:

$$E^2\Big(\sum_r \alpha_r\Big) = pq\,[(n-2)p^2 - (n-3)\,pq + nq^2],$$

$$E^2\Big(\sum_s \beta_s\Big) = pq\,[np^2 - (n-3)\,pq + (n-2)\,q^2],$$

$$E^2\Big(\sum_r \alpha_r + \sum_s \beta_s\Big) = 2pq\,\{2\,(p^2 - pq + q^2)\,n - (3p^2 - 4pq + 3q^2)\}.$$

Lorsque $n \to \infty$ les lois de distribution des variables α_r, β_s, γ_t, $\sum_r \alpha_r$, $\sum_s \beta_s$ et $\sum_r \alpha_r + \sum_s \beta_s$ convergent vers la loi normale de Gauss*.

* C'est ce qu'on déduit d'ailleurs des théorèmes connus de S. Bernstein relatifs aux variables aléatoires *dépendantes*.

En ce qui concerne la variable S, on s'assure que la valeur moyenne en est donnée par la formule asymptotique

$$\sigma(S) \sim \frac{\log n}{\log \frac{1}{p}},$$

tandis que la loi de distribution de la variable $S - \left[\frac{\log n}{\log \frac{1}{p}}\right]$ ne converge, pour $n \to \infty$, vers aucune loi-limite: on peut dire qu'elle possède une infinité de lois «points-limites» comprise dans la formule doublement exponentielle

$$F_\alpha(t) = e^{-qp^{\lambda+\alpha}} \quad (\lambda < t < \lambda + 1; \; -\infty < \lambda < +\infty),$$

où le paramètre α parcours toutes les valeurs telles que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ $(F_1(t) \equiv F_0(t+1))$.

On obtient les résultats qui précèdent en étudiant la fonction génératrice fondamentale à une infinité de variables

$$F\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots \\ y_1, y_2, \dots \end{pmatrix} = \sum p_{\substack{\alpha_1\alpha_2\dots \\ \beta_1\beta_2\dots}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \dots,$$

où $p_{\substack{\alpha_1\alpha_2\dots \\ \beta_1\beta_2\dots}}$ désigne la probabilité pour que, dans la suite des épreuves considérée, il y ait α_1 A-séries à un terme, α_2 A-séries à deux termes etc., β_1 B-séries à un terme, β_2 B-séries à deux termes etc.

On trouve que

$$F\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots \\ y_1, y_2, \dots \end{pmatrix} = \frac{\left(1 + \sum\limits_r p^r x_r\right)\left(1 + \sum\limits_s q^s y_s\right)}{1 - \sum\limits_r p^r x_r \cdot \sum\limits_s q^s y_s}.$$

2°. Toutes les permutations de n éléments sont considérées, bien entendu, comme également probables. Soit α_r le nombre de cycles à r termes $(r = 1, 2, \dots, n; \; \sum\limits_r r\alpha_r = n)$.

Etant admis que deux permutations appartiennent à la même classe toutes les fois que leurs indices $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont respectivement égaux, on s'assure, que, pour $n \geqslant 3$, la classe la plus probable est caractérisée par les indices

$$\alpha_1 = 1, \; \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_{n-2} = 0, \; \alpha_{n-1} = 1, \; \alpha_n = 0;$$

par conséquent, les permutations correspondantes se composent de deux cycles dont l'un est à un terme et l'autre à $n-1$ termes.

La valeur moyenne et l'écart moyen carré des variables α_r et $\sum \alpha_r$ (le nombre total de cycles) sont donnés par les formules suivantes:

$$\sigma(\alpha_r) = \frac{1}{r}, \quad E(\alpha_r) = \frac{1}{\sqrt{r}} \quad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\sigma\left(\sum_r \alpha_r\right) = \sum_r \sigma(\alpha_r) = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} \sim \log n, \quad E\left(\sum_r \alpha_r\right) =$$

$$= \sqrt{\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} - \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r^2}} \sim \sqrt{\log n}.$$

La loi de distribution du nombre de cycles $\sum_r \alpha_r$ converge (pour $n \to \infty$) vers celle de Gauss, tandis que la loi de distribution du nombre de cycles à r termes (r étant considéré comme constant) converge vers celle de Poisson.

La longueur relative s du cycle maximal (c'est-à-dire le nombre de termes divisé par n) suit la loi de distribution qui converge, lorsque $n \to \infty$, vers une loi-limite continue et formée d'une infinité d'arcs analytiques:

$$\varphi(s) = \frac{1}{s} \sum_{h=0}^{\lambda-1} \frac{(-1)^h}{h!} \varphi_h(s) \quad \left(\frac{1}{\lambda+1} < s \leqslant \frac{1}{\lambda}\ ;\ \lambda = 1, 2, \ldots\right),$$

$$\varphi_0(s) = 1, \qquad \varphi_h(s) = \int \ldots \int_{V_h(s)} \frac{dx_1 \ldots dx_h}{x_1 \ldots x_h} \quad (h = 1, 2, \ldots)$$

le domaine d'intégration $V_h(s)$ étant défini par les inégalités

$$x_i > s, \quad \sum_{i=1}^{h} x_i < 1 - s \quad (i = 1, 2, \ldots, h).$$

On obtient les résultats précédents en considérant la fonction génératrice fondamentale

$$F(x_1, x_2, \ldots) \equiv \sum p_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots,$$

où $p_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots}$ désigne la probabilité pour que, dans la permutation en question, il y ait α_1 cycles à un terme, α_2 cycles à deux termes etc.

Il se trouve que

$$F(x_1, x_2, \ldots) = e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}}.$$

—

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 8 (1944), 49–60 Série mathématique

А. И. МАРКУШЕВИЧ

О ПОЛИНОМАХ ФАБЕРА

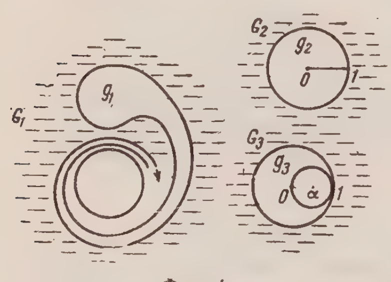
(*Представлено академиком С. Л. Соболевым*)

В статье устанавливается, при некоторых ограничениях, существование разложений по полиномам Фабера для функций аналитических в областях, ограниченных спрямляемыми (вообще, неаналитическими) кривыми.

n° 1. Пусть γ — замкнутая жорданова аналитическая кривая, без особых точек. Мы будем называть такую кривую регулярной. Обозначим через g внутренность этой кривой, через G — внешность, и пусть $w = \Phi(z)$ функция, конформно отображающая G на внешность единичного круга так, что $\Phi(\infty) = \infty$. Совокупность членов с неотрицательными показателями степеней в лорановском разложении $[\Phi(z)]^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ в окрестности точки $z = \infty$ представляет полином $\Phi_n(z)$ степени n, называемый полиномом Фабера. Полиномы $\Phi_n(z)$ впервые были рассмотрены Г. Фабером в его известной работе (¹). Фабер доказал, что каждая функция $f(z)$, аналитическая в g, может быть представлена — и притом единственным образом — рядом $\sum\limits_{0}^{\infty} a_n \Phi_n(z)$, сходящимся к $f(z)$ абсолютно и равномерно «внутри» g (т. е. на каждом замкнутом множестве точек g). Его доказательство, как он сам заметил, существенно связано с гипотезой регулярности кривой γ. Однако для определения полиномов Фабера это ограничение отнюдь не оказывается необходимым. Возникает вопрос об отыскании возможно более широкого класса областей, в которых аналитические функции допускают разложение по соответствующим полиномам Фабера. Хотя полиномы Фабера подвергались дальнейшему изучению и самим Фабером (в работах 1907 и 1920 гг.) и многими другими авторами, в указанном направлении нам известен только один результат, и то по реферату Г. Сеге (²). Результат этот принадлежит Хеузеру (Heuser) и заключается в том, что для области g, ограниченной жордановой спрямляемой кривой, ряд по полиномам Фабера, соответствующий функции $f(z)$, непрерывной в $\bar{g}$ и аналитической в g, суммируется в g к $f(z)$ мето-

дом Абеля. Хеузер пользуется при доказательстве аппроксимацией области извне. Впрочем, референт отмечает, что некоторые детали доказательства неясны для него. Мы далеки от того, чтобы дать исчерпывающий ответ на поставленный выше вопрос, однако собираемся привести в этой статье некоторые результаты, относящиеся к сходимости и суммируемости рядов по полиномам Фабера, покрывающие, в частности, результат Хеузера и получаемые иным путем. Необходимо сразу же отметить, что в обобщенной постановке задачи единственность разложения вообще теряется.

n° 2. При постановке основного вопроса в наиболее общем виде можно отправляться либо от наиболее общих ограниченных односвязных областей g, в которых мы хотим получать разложения по полиномам Фабера, либо от наиболее общих односвязных областей G, содержащих точку ∞, конформное отображение которых на внешность единичного круга приводит к построению полиномов Фабера. Эти два пути не эквивалентны. Рассмотрим каждый из них.

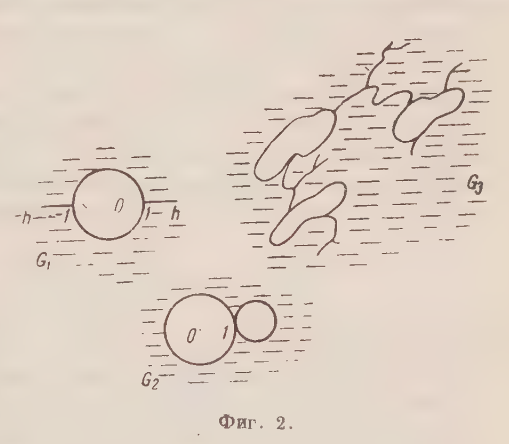


Фиг. 1.

a) Пусть g — ограниченная, односвязная область. Множество, дополнительное к $\bar{g}$ (относительно расширенной плоскости), будет открытым; оно содержит компоненту G, заключающую точку $z = \infty$. Это — односвязная область. Условимся, для краткости, называть область G **смежной** с g. В общем случае граница G есть часть границы g. В частности, граница G может совпадать с границей g. Тогда g называется областью Каратеодори (на фиг. 1 g_1 — область Каратеодори, g_2 и g_3 не будут областями Каратеодори). Отображая G на внешность единичного круга посредством функции $w = \Phi(z)$, $\Phi(\infty) = \infty$ (и, для определенности, $\Phi'(\infty) > 0$) и строя соответствующие полиномы Фабера $\{\Phi_n(z)\}$, мы приходим к задаче о разложении в ряд по полиномам $\{\Phi_n(z)\}$ функции $f(z)$, аналитической в области g. Легко видеть, что задача эта не всегда имеет решение. Так, в случае областей g_2 и g_3 (фиг. 1), не являющихся областями Каратеодори, G представляет внешность единичного круга, $\Phi(z) = z$, $\Phi_n(z) = z^n$, и речь идет о разложении в ряд по неотрицательным степеням z в областях g_2 и g_3 функций, аналитических в g_2 и g_3. Но для функции $f(z) = \sqrt{z}$ в случае g_2 и для $f(z) = \frac{1}{z-a}$ в случае g_3 подобные разложения не могут иметь места.

b) Пусть G — односвязная область, содержащая точку $z = \infty$. Множество K — дополнительное к ней (относительно всей плоскости) представляет замкнутое связное множество. Оставляя в стороне тривиальные случаи вырождения, когда K — пустое множество или содержит только одну точки, мы будем иметь дело с континуумом. Введем

разложение $K = O + \Gamma$, где O — множество внутренних точек K, а Γ — граница G. Если O не пустое, то, как легко видеть, оно представляет сумму односвязных областей Каратеодори [для случая области G_1 (фиг. 1) O — сумма g_1 и внутренности круга]. Функция $f(z)$, аналитическая на K (т. е. разлагающаяся в степенной ряд по степеням $z - z_n$ в некоторой окрестности каждой точки z_0, $z_0 \in K$), будет однозначной аналитической функцией внутри некоторой регулярной кривой Γ_R, $R > 1$, представляющей круговой образ при конформном отображении внешности единичного круга на G ($\Gamma_R = \Phi^{-1}(|w| = R)$). Следовательно, к ней применима теорема Фабера (см. n⁰ 1), и мы получаем для $f(z)$ внутри Γ_R, в частности на K, разложение $f(z) = \sum\limits_0^\infty a_n \Phi_n(z)$. Таким образом, здесь нет места для новой постановки вопроса. Мы получим новую задачу, предполагая O непустым и рассматривая функцию $f(z)$, однозначную и аналитическую на O (если O не связное множество, то $f(z)$ может и не быть аналитической, в смысле Вейерштрасса, на всем O).



Фиг. 2.

Вопрос заключается в возможности разложения $f(z)$ на O в ряд по полиномам Фабера, порожденным областью G. Мы и рассмотрим этот вопрос, предполагая, что O есть сумма конечного числа областей $g_1, g_2, \ldots, g_k$ $(k \geqslant 1)$, попарно без общих точек, ограниченных жордановыми замкнутыми спрямляемыми кривыми $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$, и что Γ, помимо $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$, может содержать еще конечное число жордановых спрямляемых дуг $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_m$ $(m \geqslant 0)$ (фиг. 2).

В виде примера рассмотрим полиномы Фабера для области G_1 (фиг. 2). Несложное вычисление показывает, что они могут быть получены, если в выражениях $2^n T_n\left(\dfrac{z + \frac{1}{z}}{h + \frac{1}{h}}\right)$, где $T_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos t)$ — полином Чебышева, отбросить отрицательные степени z. Полагая для краткости $h + \frac{1}{h} = \frac{1}{\mu}$, $0 < \mu \leqslant \frac{1}{2}$, будем иметь

$$\Phi_0(z) = 1$$

$$\Phi_1(z) = 2\mu z,$$

$$\Phi_2(z) = 4\left[\mu^2 z^2 - 2\left(\frac{1}{4} - \mu^2\right)\right],$$

$$\Phi_3(z) = 8\left[\mu^3 z^3 - 3\left(\frac{1}{4} - \mu^2\right)\mu z\right].$$

$$\Phi_4(z)=16\left[\mu^4 z^4-4\left(\frac{1}{4}-\mu^2\right)\mu^2 z^2+2\left(\frac{1}{4}-\mu^2\right)\left(\frac{1}{4}-3\mu^2\right)\right].$$

. . . .

Мы получили семейство систем полиномов $\{\Phi_n(z)\}$, зависящее от параметра μ, $0<\mu\leqslant\frac{1}{2}$. При $\mu=\frac{1}{2}$ получаем систему степеней z: $\{z^n\}$. Варьируя всевозможным образом вид и величину «наростов» на единичном круге (см. область G_2, фиг. 2), мы будем получать различные системы полиномов Фабера, ассоциированные с этим кругом. Задача заключается в изучении возможности разложения функций $f(z)$, аналитических в круге $|z|<1$, по полиномам каждой из этих систем.

n° 3. Пусть $\{\lambda_n(z)\}$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ — система функций, однозначных и аналитических в области G при $z\neq\infty$, и пусть $P_n(z)$ — совокупность членов с неотрицательными показателями степеней в лорановском разложении $\lambda_n(z)$ в окрестности точки $z=\infty$ представляет собой полином степени n при $n\geqslant 0$ и $P_n(z)=0$ при $n<0$. Предположим далее, что для каждой из функций $\lambda_n(z)$ интегралы

$$\int_{\Gamma_R}|\lambda_n(z)-P_n(z)|\,|dz|,\quad 1<R<\infty$$

(Γ_R — круговой образ при конформном отображении G на внешность единичного круга) ограничены. Тогда, путем известных рассуждений [3,4], заключаем, что $\lambda_n(z)$ имеют граничные значения $\lambda_n(\zeta)$ на Γ по всем некасательным путям почти для всех точек Γ (на дугах δ_i функции $\lambda_n(\zeta)$ будут, вообще говоря, многозначными), причем $\lambda_n(\zeta)$ суммируема на Γ и

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\lambda_n(\zeta)-P_n(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=0\quad(z\in O),$$

т. е.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\lambda_n(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=P_n(z)\quad(z\in O)\quad(n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$$

(здесь и в дальнейшем при интегрировании по Γ дуги δ_j проходятся по два раза в противоположных направлениях). Полиномы $\{P_n(z)\}$ мы будем называть обобщенными полиномами Фабера, порожденными областью G_n и функциями $\{\lambda_n(z)\}$*. В частности, при $\lambda_n(z)=[\Phi(z)]^n$ получим $P_n(z)=\Phi_n(z)$ — полиномы Фабера.

n° 4. Пусть $f(z)$ — функция, однозначная и аналитическая на O, принадлежащая здесь к классу E_1 [т. е. в каждой из областей g_j $(j=1, 2, \ldots, k)$]; последнее означает, что интегралы $\int_{\gamma_r^{(j)}}|f(z)|\,|dz|$, где $\gamma_r^{(j)}$ — круговые образы, при конформном отображении g_j на круг

* При этом определении любая система полиномов $\{P_n(z)\}$ (степень $P_n(z)$ равна n) может рассматриваться как система полиномов Фабера для любой области G.

$|w| < 1$ ограничены в совокупности $(0 < r < 1)$. Тогда, как известно ([3]), граничные значения $f(\zeta)$ существуют почти для всех точек $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_k$, по всем некасательным путям, причем $f(\zeta)$ суммируема на γ, и $f(z)$ представляется через $f(\zeta)$ интегралом Коши $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$. Допустим, что $f(\zeta)$ можно доопределить на дугах δ_j, $(j = 0, 1, \ldots, m)$ так, что 1) полученная функция $f(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$, будет однозначной и суммируемой на Γ и 2) существует последовательность линейных комбинаций $\lambda_n(z)$: $\sum_{-N}^{+N} \eta_n^{(N)} \lambda_n(z)$, $N = 0, 1, 2, \ldots$, сходящаяся в среднем к $f(z)$ на Γ:

$$\int_\Gamma \Big| f(\zeta) - \sum_{-N}^{+N} \eta_n^{(N)} \lambda_n(\zeta) \Big| \, |d\zeta| \to 0 .$$

Тогда для точки z, принадлежащей O, будем иметь

$$\left| f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\sum_{-N}^{+N} \eta_n^{(N)} \lambda_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\sum_{-N}^{+N} \eta_n^{(N)} \lambda_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta) - \sum_{-N}^{N} \eta_n^{(N)} \lambda_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| < \frac{\varepsilon}{2\pi} \cdot \frac{\text{длина } \Gamma}{\text{расст. } (z, \Gamma)} \text{ при } N > N(\varepsilon).$$

Отсюда следует, что внутри O

$$f(z) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\sum_{-N}^{+N} \eta_n^{(N)} \lambda_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \lim_{N \to \infty} \sum_{0}^{N} \eta_n^{(N)} P_n(z),$$

причем сходимость равномерна «внутри» O. Если, в частности, $\eta_n^{(N)}$ не зависят от N, $\eta_n^{(N)} = \eta_n$, то для $f(z)$ получается разложение в ряд по обобщенным полиномам Фабера

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} \eta_n P_n(z),$$

равномерно сходящееся «внутри» O.

n° 5. То, что в литературе называется обобщенными полиномами Фабера, получается в наших обозначениях для

$$\lambda_n(z) = \mu(z) [\Phi(z)]^{n-1} \Phi'(z),$$

где $\mu(z)$ — какая-либо функция, однозначная и аналитическая в G_1 — всюду, кроме точки $z = \infty$, где она имеет простой полюс. Этот вид

функций $\lambda_n(z)$ связан с принадлежащим Фаберу определением обобщенных систем полиномов посредством производящей функции

$$\frac{\mu[\Psi(w)]}{\Psi(w)-z}=P_0(z)+\frac{P_1(z)}{w}+\ldots,$$

где $z=\Psi(w)$ — функция обратная $w=\Phi(z)$ ([1]). Легко видеть, что все условия, наложенные на функции $\{\lambda_n(z)\}$ в n° 3, удовлетворяются, если принять $\mu=\frac{\Phi(z)}{\Phi'(z)}$ или $\mu(z)=\Phi(z)$. В первом случае $\lambda_n(z)=[\Phi(z)]^n$, и в качестве $P_n(z)$ получаем

$$\Phi_n(z)=\Phi_n^{(1)}(z) \text{ (полиномы Фабера первого рода),}$$

а во втором случае
$\lambda_n(z)=[\Phi(z)]^n\cdot\Phi'(z)$ и $P_n(z)=\Phi_n^{(2)}(z)$ (полиномы Фабера второго рода) ([5]).
Так как

$$\frac{d\,[\Phi(z)]^{n+1}}{dz}=(n+1)\,[\Phi(z)]^n\cdot\Phi'(z)$$

и при дифференцировании лорановского ряда совокупность членов с неотрицательными показателями дифференцируется как единое целое, то

$$\frac{d\Phi_{n+1}^{(1)}(z)}{dz}=(n+1)\,\Phi_n^{(2)}(z).$$

n° 6. Пусть $\omega(w)$ — какая-либо однозначная функция, суммируемая на окружности $|w|=1$. Полагая $w=e^{i\theta}$, находим $\omega(w)=\omega(e^{i\theta})=$ $=\alpha(\theta)+i\beta(\theta)$, где $\alpha(\theta)$ и $\beta(\theta)$ — однозначные функции с периодом 2π, суммируемые на сегменте $[0, 2\pi]$. Если

$$\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{j=1}^{\infty}(\alpha_j'\cos j\theta+\alpha_j''\sin j\theta),\ \frac{\beta_0}{2}+\sum_{j=1}^{\infty}(\beta_j'\cos j\theta+\beta_j''\sin j\theta)$$

— ряды Фурье этих функций, то функции $\omega(w)$ соответствует ряд Фурье

$$\frac{\alpha_0+i\beta_0}{2}+\sum_{j=1}^{\infty}[(\alpha_j'+i\beta_j')\cos i\theta+(\alpha_j''+i\beta_j'')\sin j\theta],$$

который, пользуясь формулами Эйлера, можно переписать в виде

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\eta_j w^j, \qquad (*)$$

где

$$\eta_0=\frac{\alpha_0+i\beta_0}{2},\qquad \eta_j=\begin{cases}\dfrac{\alpha_j'+\beta_j''+i(\beta_j'-\alpha_j'')}{2}, & j>0,\\[2mm] \dfrac{\alpha_j'-\beta_j''+i(\alpha_j''+\beta_j')}{2}, & j<0.\end{cases}$$

Как известно из теории рядов Фурье ([6]), ряд (*) суммируется (C, δ), $\delta > 0$, к $\omega(w)$ почти всюду на $|w|=1$. Когда модуль $|\omega(w)|$ ограничен, то чезаровские средние любого положительного порядка δ

$$\sigma_n^\delta(w) = \left[\binom{n+\delta}{n} \eta_0 + \binom{n-1+\delta}{n-1} (\eta_{-1} w^{-1} + \eta_1 w) + \ldots + \right.$$
$$\left. + \binom{\delta}{0} (\eta_{-n} w^{-n} + \eta_n w^n) \right] : \binom{n+\delta}{n}$$

равномерно ограничены по модулю. Когда же $\int |\omega(w)| \ln^+ |\omega(w)| |dw| < \infty$, то ряд (*) сходится в среднем к $\omega(w)$, т. е. при $N \to \infty$

$$\int_{|w|=1} \left| \omega(w) - \sum_{-N}^{+N} \eta_j w^j \right| |dw| \to 0.$$

Если $\omega(w)$ — функция с ограниченным изменением, то ряд (*) всюду сходится к $\frac{\omega[e^{i(\theta-0)}] + \omega[e^{i(\theta+0)}]}{2}$, причем частичные суммы ряда равномерно ограничены по модулю.

n° 7. Конформно отображая область G на внешность единичного круга $|w| > 1$ посредством $w = \Phi(z)$ $(\Phi(\infty) = \infty)$, найдем, что кривым $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ соответствуют на единичной окружности дуги $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{k'}$ $(k' \geqslant k)$, а дугам $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_m$ — дуги $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{m'}$ $(m' \geqslant m)$. Пусть $f(z)$ — функция класса E_1 на O и пусть, кроме того, $f(\zeta)$ имеет ограниченное изменение на γ *.

Доопределим $f(\zeta)$ на дугах δ_j $(j = 0, 1, \ldots, m)$ так, чтобы получить функцию однозначную и с ограниченным изменением на Γ [можно, например, положить $f(\zeta) = 0$, $\zeta \in \delta_j (j = 0, 1, \ldots, m)$]. Тогда, обозначив через $z = \Psi(w)$ функцию, обратную $w = \Phi(z)$, получим на единичной окружности однозначную функцию с ограниченным изменением $\omega(w) = f[\Psi(w)]$. Ее ряд Фурье сходится к ней всюду, за исключением, быть может, точек разрыва, которых, самое большее, счетное множество. Кроме того, частичные суммы ряда $\sum_{-N}^{+N} \eta_n w^n$ равномерно ограничены по модулю. Отсюда следует, что ряд $\sum_{-\infty}^{+\infty} \eta_n [\Phi(\zeta)]^n$ сходится к $f(\zeta)$ в среднем на Γ и, по n° 4:

$$f(z) = \sum_0^\infty \eta_n P_n(z) = \sum_0^\infty \eta_n \Phi_n^{(1)}(z),$$

т. е. $f(z)$ разлагаются на O в ряд по полиномам Фабера первого рода, равномерно сходящийся «внутри» O. Из самого способа получения

---

* Тогда, как известно, $f(z)$ непрерывна в $\overline{O}$ и притом абсолютно непрерывна на γ [см. ([4])].

этого разложения видно, что оно вообще не единственное, так как зависит от того, как $f(\delta)$ доопределена на дугах δ_j. В случае, когда положено $f(\zeta)=0$, $\zeta\in\delta_j$ $(j=0, 1, \ldots, m)$, коэффициенты η_n имеет следующий вид:

$$\eta_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(\zeta)\,\Phi'(\zeta)}{[\Phi(\zeta)]^{n+1}}\,d\zeta.$$

Для иллюстрации вернемся к примеру, приведенному в конце n° 2. Доопределим функцию $f(z)=0$ $(|z|\leqslant 1)$ в точках отрезков δ_0 $(-h\leqslant x<-1;\ y=0)$ и δ_1 $(1<x\leqslant h;\ y=0)$, полагая $f(\zeta)=0$, $\zeta\in\delta_0$, и $f(\zeta)=1$, $\zeta\in\delta_1$. Так как посредством отображения $w=\Phi(z)=$ $=\dfrac{1+\frac{1}{z}+\sqrt{\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-\mu^2}}{\mu}$ на область $|w|>1$ отрезкам δ_0 и δ_1 соответствуют дуги единичной окружности

$\pi-\arccos\frac{2}{\mu}<\theta=\arg w<\pi+\arccos\frac{2}{\mu}$ и $-\arccos\frac{2}{\mu}<\theta<\arccos\frac{2}{\mu}$,

то $\omega(\theta)=f[\Psi(e^{i\theta})]=0$ при $|\theta|\leqslant\arccos\frac{2}{\mu}$ и $\omega(\theta)=1$ при $|\theta|<\arccos\frac{2}{\mu}$ $(-\pi\leqslant\theta\leqslant+\pi)$. Поэтому ряд Фурье функции $\omega(\theta)$ имеет вид:

$$\frac{\alpha}{\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'\frac{\sin n\alpha}{n}\,e^{in\theta}\quad\left(\alpha=\arccos\frac{2}{\mu}\right),$$

и следовательно,

$$\frac{\alpha}{\pi}\,\Phi_0(z)+\frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty}{}'\frac{\sin n\alpha}{n}\Phi_n(z)\equiv 0\quad(|z|<1).$$

n° 8. Пусть теперь $f(z)$ — произвольная функция класса E_1 на O и $F(z)$ — какая-либо из первообразных от $f(z)$ (на связных компонентах O: $g_1, g_2, \ldots, g_k$ аддитивные постоянные в выражении $F(z)$ берутся независимо друг от друга). Как известно, $F(z)$ непрерывна в $\overline{O}$, причем ее граничные значения $F(\zeta)$ представляют функцию с ограниченным изменением и даже абсолютно непрерывную на γ [см. ([4])]. Согласно n° 7 получаем для $F(z)$ разложение

$$F(z)=\sum_{0}^{\infty}\eta_n\Phi_n^{(1)}(z),$$

равномерно сходящееся «внутри» O. Дифференцируя почленно, находим

$$f(z)=\sum_{1}^{\infty}n\eta_n\,\Phi_{n-1}^{(2)}(z)$$

(см. n° 5). Итак, всякая функция из класса E_1 на O разлагается в ряд по полиномам Фабера второго рода (порожденным областью G), равномерно сходящийся «внутри» O.

n° 9. Если функция $|f(z)|$ ограничена в O, то $f(z)$, очевидно, принадлежит к классу E_1. Доопределяя $f(\zeta)$ на δ_j при условии ограниченности $|f(\zeta)|$ на Γ, воспроизводя mutatis mutandis рассуждения n° 8, найдем, что чезаровские средние любого порядка δ ($\delta > 0$) для ряда $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} \eta_n [\Phi(\zeta)]^n$ сходятся к $f(\zeta)$ почти всюду на Γ, будучи равномерно ограниченными по модулю и, следовательно, сходятся к $f(\zeta)$ в среднем на Γ. Отсюда, на основании n° 4, выводим, что последовательность полиномов

$$\left\{\eta_0\Phi_0(z) + \frac{n}{\delta+n}\eta_1\Phi_1(z) + \frac{(n-1)\,n}{(\delta+n-1)\,(\delta+n)}\eta_2\Phi_2(z) + \ldots + \right.$$
$$\left. + \frac{1\cdot 2\ldots n}{(\delta+1)\ldots(\delta+n)}\eta_n\Phi_n(z)\right\}$$

сходится к $f(z)$ равномерно «внутри» O; иными словами, ряд $\sum\limits_{0}^{\infty}\eta_n\Phi_n^{(1)}(z)$ суммируется (C, δ), $\delta > 0$, к $f(z)$ равномерно «внутри» O.

n° 10. Если O сводится к одной лишь области g, ограниченной замкнутой спрямляемой кривой γ, а G — внешность γ, то любая функция класса E_1 с ограниченным изменением на γ может быть разложена в ряд по полиномам Фабера первого рода, а любая функция класса E_1 — по полиномам Фабера второго рода. Для функций $f(z)$, аналитических внутри g и ограниченных по модулю, получаем (n° 9) разложение по полиномам Фабера первого рода, суммируемое к $f(z)$ методом (C, δ), $\delta > 0$. Последний результат — частный случай полученного в n° 9 — в свою очередь заключает в себе, как частный случай, результат Хеузера (см. n° 1). Именно, у Хеузера вместо ограниченности $|f(z)|$ предполагается непрерывность $f(z)$ в g, а вместо суммируемости (C, δ), $\delta > 0$, утверждается лишь суммируемость по Абелю. Укажем еще на один частный случай, когда можно гарантировать разложимость в ряд по полиномам Фабера первого рода. Пусть в условиях этого пункта кривая γ обладает в каждой точке касательной, угол наклона которой $\alpha(s)$ к действительной оси, рассматриваемый как функция длины дуги s, удовлетворяет условию Липшица — Хёльдера

$$|\alpha(s'') - \alpha(s')| < C\,|s'' - s'|^{\delta} \qquad (0 < \delta \leqslant 1).$$

Тогда, как известно [7],

$$0 < \mu \leqslant |\Psi'(w)| \leqslant M < 0 \qquad (|w| \geqslant 1).$$

Рассмотрим теперь функцию $f(z)$ класса E_1 в области g, граничные значения которой $f(\zeta)$ удовлетворяют условию

$$\int\limits_{\gamma} |f(\zeta)|\, \ln^+ |f(\zeta)|\, |d\zeta| < \infty.$$

Тогда

$$\int\limits_{|w|=1} |f[\Psi(w)]| \cdot \ln^+ |f[\Psi(w)]| \cdot |\Psi'(w)| |dw| < \infty,$$

откуда, введя обозначение $f[\Psi(w)] = \omega(w)$, получаем

$$\int\limits_{|w|=1} |\omega(w)| \cdot \ln^+ |\omega(w)| |dw| < \infty.$$

Поэтому ряд Фурье для функции $\omega(w)$ сходится к ней в среднем на $|w| = 1$ (см. n° 6), т. е.

$$\int\limits_{|w|=1} |\omega(w) - \sum_{-N}^{+N} \eta_n w^n| |dw| \to 0 \qquad (N \to \infty)$$

или

$$\int\limits_{\gamma} |f(\zeta) - \sum_{-N}^{+N} \eta_n [\Phi(\zeta)]^n| \cdot |\Phi'(\zeta)| |d\zeta| \to 0, \qquad (N \to \infty).$$

Наконец, замечая, что $|\Phi'(\zeta)| = \frac{1}{|\Psi'(w)|} \geqslant \frac{1}{M} > 0$, находим

$$\int\limits_{\gamma} |f(\zeta) - \sum_{-N}^{+N} \eta_n [\Phi(\zeta)]^n| |d\zeta| \to 0 \qquad (N \to 0).$$

Это соотношение, согласно n° 4, влечет за собой существование разложения

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} \eta_j \Phi_j^{(1)}(z)$$

по полиномам Фабера первого рода.

Научно-исследовательский институт математики МГУ.

Поступило 22. VI. 1943

ЛИТЕРАТУРА

[1] Faber G., Über polynomische Entwicklungen, Math. Annalen, 57 (1903), 389—408; 64 (1907), 116—135.

[2] Szegö G., Mathem. Reviews, 1 (1940).

[3] Smirnov V., Sur les formules de Cauchy et de Green etc., Изв. Акад. Наук СССР, Отд. мат. и ест. наук, 1932, 341.

[4] Привалов И. И., Граничные свойства однозначных аналитических функций, Москва, 1941.

[5] Baur A., Neue Behandlungsweise der reellen Tschebyscheffschen und der Faberschen Polynome, Inaug. Diss., 1927 [см. также Я. Л. Геронимус, О некоторых системах полиномов, Матем. сб., 3 (45): 2 (1938), 375—388].
[6] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л, 1939.
[7] Lichtenstein L., Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung, Encycl. d. Mathem. Wissenschaften. Bd. II, S. 254.

A. MARCOUCHEVITCH. SUR LES POLYNOMES DE FABER

RÉSUMÉ

Considérons dans le plan complexe complet un domaine G simplement connexe contenant le point à l'infini; supposons que le complémentaire K de G est formé d'un nombre fini de domaines simplement connexes $g_1, g_2, \ldots, g_k$, qui deux à deux sans points communs et bornés par des courbes fermées de Jordan rectifiables $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ et peut être encore par un nombre fini d'arcs rectifiables de Jordan $\delta_0, \ldots, \delta_m$ $(m \geqslant 0)$. Si $w = \Phi(z)$ $(\Phi(\infty) = \infty)$ est la fonction qui realise le représentation conforme de G sur le domaine extérieur au cercle $|w| > 1$, alors on appelle polynomes de Faber $\Phi_n(z) = \Phi_n^1(z)$ (polynomes de Faber de première espèce) la somme des termes contenant les puissances non négatives dans le développement de Laurent de $[\Phi(z)]^n$ au voisinage de $z = \infty$ et polynomes de Faber de seconde espèce $\Phi_n^2(z)$ des expressions analogues formées pour $[\Phi(z)]^n \Phi'(z)$. On démontre que pour chaque fonction $f(z)$, uniforme et analytique dans les domaines $g_1, \ldots, g_k$, qui appartient à la classe E_1 * dans ces domaines et qui possède sur $\gamma_1 + \cdots + \gamma_k$ des valeurs limites à variation bornée, il existe un développement $\sum_0^\infty a_n \Phi_n^1(z)$ (qui, en général, n'est pas unique) et converge uniformement vers $f(z)$ «à l'intérieur» de $g_1, \ldots, g_k$, c'est-à-dire sur chaque ensemble fermé de points de $g_1 + \cdots + g_k$.

Pour chaque fonction, uniforme et analytique, $f(z)$ de classe E_1 dans $g_1, \ldots, g_k$ il existe un développement $\sum_0^\infty b_n \Phi_n^2(z)$, qui converge vers $f(z)$ uniformément «à l'intérieur» de g. Si $f(z)$ est uniforme et analytique dans $g_1 + \cdots + g_k$ et de module borné, alors il existe un développement $\sum_0^\infty a_n \Phi_n^1(z)$ sommable vers $f(z)$ par un méthode quelconque (C, δ) $(\delta > 0)$ et la convergence est uniforme «à l'intérieur» de g.

---

* C'est-à-dire les integrales $\int_{\gamma_r^{(j)}} |f(\zeta)|\, d\zeta$, ou $\gamma_r^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ sont les images des g_1 dans la représentation conforme sur le cercle unitaire, sont bornées.

Dans le cas, où $k=1$, $m=0$, et si $\gamma_1=\gamma$ possède en chaque point une tangente dont le coefficient angulaire vérifie la condition de Lipschitz — Hölder, alors pour chaque fonction $f(z)$ appartenant à la classe E_1 dans le domaine $g_1=g$ et dont les valeurs limites vérifient la condition

$$\int_\gamma |f(\zeta)| \ln^+ |f(\zeta)|\, d\zeta < \infty,$$

il existe un développement $\sum_0^\infty a_n \Phi_n^j(z)$, qui converge uniformément vers $f(z)$ «à'intérieur» de g.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 8 (1944), 61–100 Série mathématique

Н. А. АРТЕМЬЕВ

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ И ПРИЛОЖЕНИЕ ЕГО К ДВУМ ЗАДАЧАМ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

(*Представлено академиком* **С. Л. Соболевым**)

Дается общий метод вычисления характеристических показателей системы линейных уравнений с периодическими коэффициентами и применяется к определению областей неосуществимости, лежащих вблизи критических отношений частот.

Исследуется осуществимость либрационных точек L_4, L_5 и осуществимость круговых орбит. В обеих задачах устанавливается наличие параметрического резонанса вблизи соизмеримости среднего суточного движения Сатурна—Юпитера и Юпитера—астероида.

Введение

Эта статья служит продолжением работы ([1])*. В последней были найдены критические отношения частот $\frac{n_0}{n}$, вблизи которых может обнаружиться неосуществимость соответствующего невозмущенного движения (либрационной точки L_4 или круговой орбиты) уже из исследования линейных уравнений первого приближения. Было показано, что осуществимость или неосуществимость невозмущенного движения зависит от того, будут ли вещественные части характеристических показателей некоторой линейной системы дифференциальных уравнений равны нулю или нет. Оставалось вычислить характеристические показатели некоторых линейных систем, коэффициенты которых зависели от параметра ε.

В этой статье я даю общий метод вычисления характеристических показателей системы линейных уравнений, коэффициенты которой являются голоморфными функциями параметра ε.

Предлагаемый автором метод в некоторых случаях (в частности, в обеих рассматриваемых нами конкретных задачах) оказывается значительно проще для практического применения, чем метод Ляпунова [([2]), § 48—49]. В тех случаях, когда правые части линейной системы в нормальной форме представляют собою целые трансцендентные функции параметра ε и при этом соблюдаются еще некоторые условия, формулы,

* Все обозначения предыдущей работы сохранены. Часть статьи, именно §§ 1—6, можно читать, не зная предыдущей работы; остальные параграфы предполагают знакомство с предыдущей работой.

построенные автором, так же как и ряды Ляпунова, оказываются пригодными на всей комплексной плоскости ε, а не только при малых значениях параметра ε.

В §§ 1—4 дается изложение этого метода. В §§ 5—6 применение метода иллюстрируется на уравнении Матье. В §§ 7—9 метод применяется к исследованию областей неосуществимости вблизи критических отношений частот в задаче о движении Троянцев. В §§ 10—11 этим методом исследуются области неосуществимости в задаче о распределении астероидов. В § 12 полученные результаты сравниваются с экспериментальными данными.

§ 1

Определение характеристических показателей будет основано на интегрировании системы линейных уравнений с помощью рядов определенного вида. Для доказательства сходимости этих рядов нужны две леммы, непосредственно вытекающие из известной теоремы Вейерштрасса [(3), § 301; (4), гл. III, § 10] теории аналитических функций.

ЛЕММА 1. *Пусть*

$$f_1(z)+f_2(z)+\ldots+f_n(z)+\ldots \tag{1,1}$$

— ряд, все члены которого целые трансцендентные функции z. Если ряд (1,1) равномерно сходится на окружности с любым конечным радиусом и с центром в точке $z=0$, то этот ряд сходится в любой конечной точке плоскости z, и сумма его $F(z)$ будет целой трансцендентной функцией z.

ЛЕММА 2. *Пусть*

$$\begin{gathered}[\varphi_1(z)+z^{\nu_1}\psi_1(z)+z^{\nu_2}\chi_1(z)]+[\varphi_2(z)+z^{\nu_1}\psi_2(z)+z^{\nu_2}\chi_2(z)]+\\+\ldots+[\varphi_n(z)+z^{\nu_1}\psi_n(z)+z^{\nu_2}\chi_n(z)]+\ldots\end{gathered} \tag{2,1}$$

— ряд, в котором $\varphi_j(z)$, $\psi_j(z)$, $\chi_j(z)$, $j=1, 2, \ldots,$ голоморфные функции z в круге C_r с центром в точке $z=0$, а ν_1, ν_2 — дробные показатели. Если ряды

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(z)+\varphi_2(z)+\ldots,\\ \psi_1(z)+\psi_2(z)+\ldots,\\ \chi_1(z)+\chi_2(z)+\ldots,\end{aligned}\right\} \tag{3,1}$$

равномерно сходятся на C_r, то ряд (2,1) сходится в любой точке внутри C_r, и сумма его

$$S(z)=\Phi(z)+z^{\nu_1}\Psi(z)+z^{\nu_2}X(z),$$

где $\Phi(z)$, $\Psi(z)$, $X(z)$ — голоморфные функции z внутри круга C_r.

Примечание. Каждый член ряда (2,1) состоит из трех слагаемых вида $z^{\nu}f(z)$, где ν — дробь, а $f(z)$ — голоморфная функция z. Очевидно, аналогичная лемма справедлива и для ряда вида

$$\sum_{j=0}^{m}\varphi_1^{(j)}(z)\cdot z^{\nu_j}+\sum_{j=0}^{m}\varphi_2^{(j)}(z)\cdot z^{\nu_j}+\sum_{j=0}^{m}\varphi_3^{(j)}(z)\cdot z^{\nu_j}+\ldots$$

§ 2

В большинстве конкретных задач, при исследовании осуществимости периодического движения, придется вычислять характеристические показатели системы линейных уравнений с периодическими коэффициентами, содержащей малый параметр ε:

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} [\bar{A}_{jk}(t) + \varepsilon A_{jk}(t)]\, x_k \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{0,2}$$

Характеристические показатели и само решение системы (0,2) при $\varepsilon = 0$ предполагаются известными.

Для вычисления характеристических показателей системы (0,2) при малых значениях параметра ε можно было бы воспользоваться методом, указанным Ляпуновым в его диссертации [(2), § 48, 49] *. Однако, в некоторых случаях удобнее непосредственно искать разложения характеристических показателей.

В дальнейшем, для сокращения записи, мы будем пользоваться векторными и матричными обозначениями.

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\frac{dX}{dt} = XA(t, \varepsilon), \tag{I}$$

где X и $A(t, \varepsilon)$ — матрицы. Предположим, что матрица $A(t, \varepsilon)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. При всех вещественных значениях t и вещественных ε, удовлетворяющих неравенству $|\varepsilon| \leqslant r$, матрица $A(t, \varepsilon)$ будет вещественной непрерывной функцией t.

2. $A(t, \varepsilon) = A(t + 2\pi, \varepsilon)$ при всех $|\varepsilon| \leqslant r$.

3. Вблизи $\varepsilon = 0$, при $t \in [0, 2\pi]$, матрица $A(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t)\, \varepsilon^k$ представляет собою голоморфную функцию ε, причем ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| a_k \| \varepsilon^k \quad (\| a_k \| \geqslant |A_k(t)| \text{ при } t \in [0, 2\pi])$$

сходится при $|\varepsilon| \leqslant r$.

Пусть заданы начальные условия

$$X(0, \varepsilon) = E(\varepsilon), \tag{1,2}$$

причем матрица $E(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} E_k \varepsilon^k$ есть голоморфная функция ε вблизи $\varepsilon = 0$, а ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| e_k \| \varepsilon^k \quad (\| e_k \| \geqslant |E_k|)$$

сходится при $|\varepsilon| \leqslant r$.

* Предлагаемые Ляпуновым ряды сходятся при любом ε, а не только при малом.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА (ЛЯПУНОВА). *Решение $X(t, \varepsilon)$ системы* (I), *удовлетворяющее начальным условиям* (1,2), *является голоморфной функцией параметра ε вблизи $\varepsilon = 0$, причем ряд*

$$X(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(t)\, \varepsilon^k \tag{2,2}$$

сходится при $|\varepsilon| < r$ и любом вещественном t.

Доказательство*. Для доказательства применим метод последовательных приближений. С этой целью, воспользовавшись (1,2), представим (I) в виде

$$X(t, \varepsilon) = E(\varepsilon) + \int_0^t X(t, \varepsilon)\, A(t, \varepsilon)\, dt. \tag{3,2}$$

Определим последовательные приближения формулой

$$X^{(m)}(t, \varepsilon) = E(\varepsilon) + \int_0^t X^{(m-1)}(t, \varepsilon)\, A(t, \varepsilon)\, dt. \tag{4,2}$$

Так как в силу предположений 1, 2, 3 система (I) удовлетворяет всем условиям обычной теоремы Пикара, то можно сразу утверждать, что ряд

$$X(t, \varepsilon) = X^{(0)}(t, \varepsilon) + [X^{(1)}(t, \varepsilon) - X^{(0)}(t, \varepsilon)] + \ldots \quad (X^{(0)}(t, \varepsilon) \equiv E(\varepsilon)) \tag{5,2}$$

сходится абсолютно и равномерно в любом конечном промежутке по t и при $|\varepsilon| \leqslant r$, причем функция $X(t, \varepsilon)$ удовлетворяет системе (I) и начальным условиям (1,2).

Для того чтобы доказать, что решение $X(t, \varepsilon)$ будет голоморфной функцией ε при $|\varepsilon| \leqslant r$ и любом вещественном конечном t, достаточно показать:

1) что каждое приближение $X^{(m)}(t, \varepsilon)$ есть голоморфная функция ε при $|\varepsilon| \leqslant r$ и вещественном конечном t,

2) что ряд (5,2) сходится равномерно на окружности C_r радиуса r с центром в точке $\varepsilon = 0$ при любом вещественном фиксированном t.

Для этого, наряду с системой (I), рассмотрим систему

$$\frac{dZ}{dt} = Z \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \| a_k \| \varepsilon^k,$$

или систему

$$Z(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \| e_k \| \varepsilon^k + \int_0^t Z(t, \varepsilon) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \| a_k \| \varepsilon^k\, dt, \tag{6,2}$$

которая является усиливающей, если в ней ε заменить на $|\varepsilon|$.

* Мы приводим это доказательство, так как оно несколько отличается от доказательства Ляпунова; кроме того, аналогичным методом будет доказана следующая теорема.

Решение системы (6,2) дается соотношением

$$Z(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \| e_k \| \varepsilon_k \cdot e^{t \sum_{k=0}^{\infty} \| a_k \| \varepsilon^k}$$

Так как ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| e_k \| \varepsilon^k \text{ и } \sum_{k=0}^{\infty} \| a_k \| \varepsilon^{k'}$$

сходятся при $|\varepsilon| \leqslant r$, то по теореме о подстановке ряда в ряд заключаем, что ряд для $Z(t, \varepsilon)$, расположенный по степеням ε, будет сходиться при $|\varepsilon| \leqslant r$. С другой стороны, строя последовательные приближения по формуле

$$\dot{Z}^{(m)}(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \| e_k \| \varepsilon^k + \int_0^t Z^{(m-1)}(t, \varepsilon) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \| a_k \| \varepsilon^k \, dt$$

и принимая за нулевое приближение $\sum_{k=0}^{\infty} \| e_k \| \varepsilon^k$, легко убедиться, что каждый коэффициент ряда $Z(t, |\varepsilon|)$, стоящий при $|\varepsilon|^{\nu}$, больше соответствующего коэффициента при ε^{ν} ряда для $Z^{(m)}(t, |\varepsilon|)$, а этот последний в свою очередь больше коэффициента при ε^{ν} ряда для $X^{(m)}(t, \varepsilon)$. Следовательно*, каждое приближение $X^{(m)}(t, \varepsilon)$ является голоморфной функцией ε при $|\varepsilon| \leqslant r$ и любом вещественном конечном t. Далее,

$$|X(t, \varepsilon)| \leqslant Z(t, |\varepsilon|),$$

и так как сумма ряда $Z(t, \varepsilon)$ сходится равномерно на C_r при любом t, то, по теореме Вейерштрасса [(3), § 301], ряд $X(t, \varepsilon)$ представляет собою голоморфную функцию ε при $|\varepsilon| \leqslant r$ и любом вещественном конечном t, что и требовалось доказать.

Замечание. При замене условия 4 более сильным предположением и, именно, приняв, что ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| e_k \| \varepsilon^k \text{ и } \sum_{k=0}^{\infty} \| a_k \| \varepsilon^k$$

представляют собою целые трансцендентные функции ε, можно (применяя вместо теоремы Вейерштрасса лемму 1) показать, что решение $X(t, \varepsilon)$ будет целой трансцендентной функцией ε.

Рассмотрим теперь систему

$$\frac{dX}{dt} = XA(t, \varepsilon) \qquad (I^*)$$

в предположении, что матрица $A(t, \varepsilon)$ имеет вид

$$A(t, \varepsilon) = A_0(t, \varepsilon) + \varepsilon^{\nu_1} A_1(t, \varepsilon) + \ldots + \varepsilon^{\nu_p} A_p(t, \varepsilon), \qquad (7,2)$$

* Отсюда вытекает, что каждая разность $X^{(m+1)}(t, \varepsilon) - X^m(t, \varepsilon)$ есть голоморфная функция ε при $|\varepsilon| \leqslant r$.

причем матрицы $A_j(t, \varepsilon)$, $j=1, \ldots, p$, удовлетворяют условиям, аналогичным 1, 2, 3, а $\nu_1, \ldots, \nu_p$ — дробные показатели, удовлетворяющие при любых целых положительных α, β, j, $k=1, \ldots, p$, соотношениям

$$\alpha\nu_j+\beta\nu_k=s+\nu_l,$$

где s — некоторые целые положительные числа, l — одно из чисел $1, \ldots, p$.

Пусть начальные условия будут

$$X(0, \varepsilon)=E(\varepsilon) \tag{8.2}$$

и пусть

$$E(\varepsilon)=E_0(\varepsilon)+\varepsilon^{\nu_1}E_1(\varepsilon)+\ldots+\varepsilon^{\nu_p}E_p(\varepsilon), \tag{9,2}$$

где $E_j(\varepsilon)$, $j=1,\ldots, p$, удовлетворяют тем же условиям, что и функция $E(\varepsilon)$ в предыдущей теореме. Тогда справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. *Решение $X(t, \varepsilon)$ системы* (I^*), *удовлетворяющее начальным условиям* (9,2), *имеет вид*

$$X(t, \varepsilon)=X_0(t, \varepsilon)+\varepsilon^{\nu_1}X_1(t, \varepsilon)+\ldots+\varepsilon^{\nu_p}X_p(t, \varepsilon), \tag{10,2}$$

где $X_j(t, \varepsilon)$, $j=1, \ldots, p$, — голоморфные функции ε при $|\varepsilon|\leqslant r$ и любом вещественном t.

Доказательство. Применяя (как и в предыдущей теореме) метод последовательных приближений, можно сразу утверждать, что последовательные приближения сходятся и что ряд

$$X(t, \varepsilon)=X^{(0)}(t, \varepsilon)+[X^{(1)}(t, \varepsilon)-X^{(0)}(t, \varepsilon)]+\ldots, \tag{11,2}$$

где $X^{(0)}(t, \varepsilon)=E(\varepsilon)$, сходится абсолютно и равномерно в любом конечном промежутке по t и при $|\varepsilon|\leqslant r$, причем функция $X(t, \varepsilon)$ удовлетворяет системе (I^*) и начальным условиям (9,2).

Остается доказать, что решение $X(t, \varepsilon)$ имеет вид (10,2). Для этого достаточно показать:

1° что каждое приближение $X^{(m)}(t, \varepsilon)$ имеет вид

$$X^{(m)}(t, \varepsilon)=X_0^{(m)}(t, \varepsilon)+\varepsilon^{\nu_1}X_1^{(m)}(t, \varepsilon)+\ldots+\varepsilon^{\nu_p}X_p^{(m)}(t, \varepsilon), \tag{12,2}$$

где $X_j^{(m)}(t, \varepsilon)$, $j=1, \ldots, p$, — голоморфные функции при $|\varepsilon|\leqslant r$ и вещественном конечном t;

2° что ряды $X_j^{(0)}(t, \varepsilon)+[X_j^{(1)}(t, \varepsilon)-X_j^{(0)}(t, \varepsilon)]+\ldots, j=1, \ldots, p$, сходятся равномерно на окружности C_r при любом вещественном, фиксированном t.

Для этого, наряду с системой (I^*), рассмотрим систему (усиливающую при замене ε на $|\varepsilon|$)

$$\frac{dZ}{dt}=Z\cdot\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\|a_k^0\|\varepsilon^k+\varepsilon^{\nu_1}\sum_{k=0}^{\infty}\|a_k^1\|\varepsilon^k+\ldots+\varepsilon^{\nu_p}\sum_{k=0}^{\infty}\|a_k^p\|\varepsilon^k\right\}\equiv Z\cdot A^*(\varepsilon) \tag{13,2}$$

и ее решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$Z(0, \varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\|e_k^0\|\varepsilon^k+\varepsilon^{\nu_1}\sum_{k=0}^{\infty}\|e_k^1\|\varepsilon^k+\ldots+\varepsilon^{\nu_p}\sum_{k=0}^{\infty}\|e_k^p\|\varepsilon^k\equiv E^*(\varepsilon), \tag{14,2}$$

имеет следующий вид:

$$Z(t, \varepsilon) = E^*(\varepsilon)\, e^{tA^*(\varepsilon)}. \qquad (15,2)$$

Ряды $E^*(\varepsilon)$ и $A^*(\varepsilon)$ сходятся при $|\varepsilon| \leqslant r$.

Представим теперь $e^{tA^*(\varepsilon)}$ в виде

$$e^{tA^*(\varepsilon)} = e^{t\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|a_k^0\| \varepsilon^k} \cdot e^{t\varepsilon^{\nu_1}\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|a_k^1\| \varepsilon^k} \ldots e^{t\varepsilon^{\nu_p}\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|a_k^p\| \varepsilon^k}$$

применим к каждому множителю теорему о подстановке ряда в ряд. перемножим полученные ряды; перегруппируем и приведем подобные члены,—тогда ряд (15,2) (в силу свойств чисел ν_j) будет иметь вид

$$Z(t, \varepsilon) = Z_0(t, \varepsilon) + \varepsilon^{\nu_1} Z_1(t, \varepsilon) + \ldots + \varepsilon^{\nu_p} Z_p(t, \varepsilon), \qquad (16,2)$$

причем каждый ряд $Z_j(t, \varepsilon)$ будет сходиться равномерно на C_r.

С другой стороны, строя последовательные приближения по формуле

$$Z^{(m)}(t, \varepsilon) = E^*(\varepsilon) + \int\limits_0^t Z^{(m-1)}(t, \varepsilon)\, A^*(\varepsilon)\, dt \qquad (17,2)$$

и принимая за нулевое приближение $E^*(\varepsilon)$, легко убедиться, что после умножения и приведения подобных членов каждый коэффициент ряда $Z_j(t, \varepsilon)$, $j = 1, \ldots, p$, стоящий при какой-либо степени ε, больше соответствующего коэффициента ряда для $Z_j^{(m)}(t, \varepsilon)$, $j = 1, \ldots, p$, а этот последний в свою очередь больше соответствующего коэффициента ряда для $X_j^{(m)}(t, \varepsilon)$, $j = 1, \ldots, p$. Следовательно, каждое приближение имеет вид (12,2), причем сходится при $|\varepsilon| < r$ и любом вещественном конечном t. Далее,

$$|X_j(t, \varepsilon)| \leqslant Z_j(t, |\varepsilon|) \qquad (18,2)$$

и так как сумма ряда $Z_j(t, |\varepsilon|)$ сходится равномерно на C_r при любом вещественном конечном t, то и $X_j(t, \varepsilon)$ будет сходиться равномерно на C_r. Следовательно, в силу леммы 2

$$X(t, \varepsilon) = X_0(t, \varepsilon) + \varepsilon^{\nu_1} X_1(t, \varepsilon) + \ldots + \varepsilon^{\nu_p} X_p(t, \varepsilon),$$

где $X_j(t, \varepsilon)$, $j = 1, \ldots, p$, —голоморфные функции ε при $|\varepsilon| < r$, что и требовалось доказать.

§ 3

Рассмотрим снова систему

$$\frac{dX}{dt} = XA(t, \varepsilon), \qquad (I)$$

где $A(t, \varepsilon)$ удовлетворяет условиям 1, 2 и 3 § 2.

Пусть $X(t, \varepsilon)$—фундаментальное решение системы (I), удовлетворяющее начальным условиям

$$X(0, \varepsilon) = I \text{ при } |\varepsilon| \leqslant r. \qquad (1,3)$$

Пусть $B(\varepsilon)$ — матрица интегральной подстановки, соответствующей периоду 2π

$$X(2\pi, \varepsilon) = BX(0, \varepsilon) = B. \tag{2,3}$$

Как мы увидим ниже, исследование корней характеристического уравнения

$$D(B - \rho I) = 0$$

при $\varepsilon = 0$ позволит в некоторых случаях установить вид разложений корней характеристического уравнения вблизи $\varepsilon = 0$, а отсюда и вид разложений характеристических показателей вблизи $\varepsilon = 0$. На основании некоторых эвристических рассуждений мы установим сейчас возможный вид разложения решения, взятого в канонической форме.

Пусть фундаментальное решение системы (I) в канонической форме имеет вид

$$\begin{Vmatrix} e^{\sigma_1(\varepsilon)t}\psi_{11}(t, \varepsilon), \dots & e^{\sigma_1(\varepsilon)t}\psi_{1n}(t, \varepsilon) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ e^{\sigma_n(\varepsilon)t}\psi_{n1}(t, \varepsilon), \dots, & e^{\sigma_n(\varepsilon)t}\psi_{nn}(t, \varepsilon) \end{Vmatrix} = [e^{\sigma_1(\varepsilon)t}, \dots, e^{\sigma_n(\varepsilon)t}]\,\Psi(t, \varepsilon), \tag{3,3}$$

где $\psi_{jk}(t, \varepsilon) = \psi_{jk}(t + 2\pi, \varepsilon)$, $j, k = 1, \dots, n$.

Составляем из (3,3) новую фундаментальную систему, умножая (3,3) слева на неособенную матрицу $C(\varepsilon)$,

$$C(\varepsilon)\,[e^{\sigma_1(\varepsilon)t}, \dots, e^{\sigma_n(\varepsilon)t}]\,\Psi(t, \varepsilon) = X(t, \varepsilon). \tag{4,3}$$

Матрицу $C(\varepsilon)$ всегда можно выбрать так, чтобы матрица $X(t, \varepsilon)$ удовлетворяла любым начальным условиям. Выберем $C(\varepsilon)$ так, чтобы при $|\varepsilon| < r$

$$X(0, \varepsilon) = I. \tag{1,3}$$

Из (1,3) и (4,3) имеем

$$C(\varepsilon)\,\Psi(0, \varepsilon) = I,$$

или так как матрица $\Psi(0, \varepsilon)$ неособенная при $|\varepsilon| \leqslant r$, в силу фундаментальности решения (3,3), то

$$C(\varepsilon) = \Psi^{-1}(0, \varepsilon). \tag{5,3}$$

Если $\Psi(0, \varepsilon)$ — голоморфная функция ε вблизи $\varepsilon = 0$, то $\Psi^{-1}(0, \varepsilon)$ также голоморфна вблизи $\varepsilon = 0$, а следовательно, и $C(\varepsilon)$ будет голоморфной функцией ε вблизи $\varepsilon = 0$; если же

$$\Psi(0, \varepsilon) = \Psi_0(0, \varepsilon) + \varepsilon^{\gamma_1}\Psi_1(0, \varepsilon) + \dots + \varepsilon^{\gamma_p}\Psi_p(0, \varepsilon), \tag{6,3}$$

где $\Psi_j(0, \varepsilon)$ — голоморфные функции ε вблизи $\varepsilon = 0$, то $\Psi^{-1}(0, \varepsilon)$, а следовательно, и $C(\varepsilon)$ будут иметь такой же вид. В самом деле,

$$D(\Psi(0, \varepsilon)) = \Phi_0(0, \varepsilon) + \varepsilon^{\gamma_1}\Phi_1(0, \varepsilon) + \dots + \varepsilon^{\gamma_p}\Phi_p(0, \varepsilon),$$

где $\Phi_j(0, \varepsilon)$ — голоморфные функции вблизи $\varepsilon = 0$, причем $\Phi_0(0, 0) \neq 0$. Но

$$\Psi^{-1}(0, \varepsilon) = \frac{D_{jk}(\Psi(0, \varepsilon))}{D(\Psi(0, \varepsilon))}, \tag{7,3}$$

где $D_{jk}(\Psi(0, \varepsilon))$—алгебраическое дополнение определителя $D(\Psi(0, \varepsilon))$. Очевидно, что после того; как мы разделим ряд; стоящий в числителе (7,3), на ряд, стоящий в знаменателе; получим снова ряд такого же вида.

Из (4,3) находим

$$[e^{\sigma_1(\varepsilon)t}, \ldots, e^{\sigma_n(\varepsilon)t}] = C^{-1}(\varepsilon)\, X(t, \varepsilon)\, \Psi^{-1}(t, \varepsilon). \tag{8,3}$$

Так как $X(0, \varepsilon)$ (начальные условия (1,3)) и матрица $A(t, \varepsilon)$ вблизи $\varepsilon = 0$ представляют собою голоморфные функции ε, то, применяя к решению $X(t, \varepsilon)$ теорему Ляпунова (§ 2), заключаем, что вблизи $\varepsilon = 0$ $X(t, \varepsilon)$ будет голоморфной функцией ε. Воспользовавшись (4,3), составим дифференциальное уравнение для $\Psi(t, \varepsilon)$:

$$C(\varepsilon)[e^{\sigma_1(\varepsilon)t}, \ldots, e^{\sigma_n(\varepsilon)t}]\frac{d\Psi}{dt} + C(\varepsilon)[\sigma_1 e^{\sigma_1 t}, \ldots, \sigma_n e^{\sigma_n t}]\Psi =$$
$$= C(\varepsilon)[e^{\sigma_1(\varepsilon)t}, \ldots, e^{\sigma_n(\varepsilon)t}]\Psi A(t, \varepsilon) \tag{9,3}$$

или, умножая слева на $C^{-1}(\varepsilon)$ и затем на $[e^{\sigma_1 t}, \ldots, e^{\sigma_n t}]^{-1}$,

$$\frac{d\Psi}{dt} + [\sigma_1(\varepsilon), \ldots, \sigma_n(\varepsilon)]\Psi = \Psi A(t, e). \tag{10,3}$$

Рассмотрим два случая:

Случай I. Предположим, что на основании каких-либо соображений известно, что $[\sigma_1(\varepsilon), \ldots, \sigma_n(\varepsilon)]$ голоморфная функция ε вблизи $\varepsilon = 0$. Так как левая часть (8,3) представляет собою голоморфную функцию ε, то и правая часть должна быть голоморфной. Если $C(\varepsilon)$ голоморфна вблизи $\varepsilon = 0$, то и $C^{-1}(\varepsilon)$ будет голоморфной. А так как $X(t, \varepsilon)$ также голоморфная функция, то, следовательно, $\Psi^{-1}(t, \varepsilon)$ и $\Psi(t, \varepsilon)$ также должны быть голоморфными вблизи $\varepsilon = 0$. Но $\Psi(t, \varepsilon)$ представляет собою решение системы (10,3), удовлетворяющее голоморфным начальным условиям $\Psi(0, \varepsilon)$. По теореме Ляпунова $\Psi(t, \varepsilon)$ действительно должна быть голоморфной функцией ε, так как коэффициенты системы (10,3) будут голоморфными функциями ε. Таким образом, в случае, когда $[\sigma_1(\varepsilon), \ldots, \sigma_n(\varepsilon)]$ голоморфная функция ε, можно надеяться получить решение (3,3), разыскивая $\Psi(t, \varepsilon)$ в виде голоморфной функции ε.

Случай II. Пусть на основании каких-либо соображений известно, что $[\sigma_1(\varepsilon), \ldots, \sigma_n(\varepsilon)]$ имеет вид

$$[\sigma_1(\varepsilon), \ldots, \sigma_n(\varepsilon)] = [\sigma_1^{(0)}(\varepsilon), \ldots, \sigma_n^{(0)}(\varepsilon)] +$$
$$+ \varepsilon^{\nu_1}[\sigma_1^{(1)}(\varepsilon), \ldots, \sigma_n^{(1)}(\varepsilon)] + \ldots + \varepsilon^{\nu_p}[\sigma_1^{(p)}(\varepsilon), \ldots, \sigma_n^{(p)}(\varepsilon)], \tag{11,3}$$

где $[\sigma_1^{(j)}(\varepsilon), \ldots, \sigma_n^{(j)}(\varepsilon)]$, $j = 1, \ldots, p$, — голоморфные вблизи $\varepsilon = 0$ функции ε.

Из (8,3) видно, что в этом случае $\Psi(t, \varepsilon)$ заведомо не может быть голоморфной, так как тогда $\Psi(0, \varepsilon)$ была бы голоморфной, а значит, в силу (5,3), и $C(\varepsilon)$ была бы голоморфной, т. е. правая часть (8,3) была бы голоморфной функцией ε вблизи $\varepsilon = 0$, а это противоречит виду левой части (8,3).

Если же предположить, что $\Psi(t, \varepsilon)$ имеет вид (6,3), то, повторяя аналогичные рассуждения, убедимся, что правая и левая часть (8,3)

имеют один и тот же вид, а вид $\Psi(t, \varepsilon)$ в силу (10,3) и начальных условий $\Psi(0, \varepsilon)$ согласуется с теоремой 2 (§ 2).

Таким образом, в случае, когда $[\sigma_1(\varepsilon), \ldots, \sigma_n(\varepsilon)]$ имеет вид (11,3), можно надеяться получить решение (3,3), разыскивая решение $\Psi(t, \varepsilon)$ в виде (6,3).

Заметим, что в обоих случаях (случаи I и II) матрица $\Psi(t, \varepsilon)$ должна быть периодической функцией t периода 2π и, следовательно, должна удовлетворять условиям

$$\Psi(0, \varepsilon) = \Psi(0, 2\pi). \qquad (12,3)$$

Будем искать $\Psi(t, \varepsilon)$ в виде голоморфной функции ε или в виде (6,3), в зависимости от того, какой из двух случаев (случаи I и II) имеет место. Применим метод последовательных приближений, либо, что по существу одно и то же, метод неопределенных коэффициентов, подставляя $\Psi(t, \varepsilon)$ в (10,3) и сравнивая коэффициенты при степенях ε. Если нам удастся при этом удовлетворить граничным условиям (12,3), то, в силу теоремы Ляпунова, или, соответственно, теоремы 2 (§ 2) при достаточно малом $|\varepsilon|$ мы получим заведомо сходящиеся разложения.

Таким образом, если в первом или во втором случае удастся построить соответствующие ряды, формально удовлетворяющие всем требуемым условиям, то они заведомо окажутся сходящимися при достаточно малом $|\varepsilon|$.

§ 4

Докажем теперь, что если $\sigma_1(\varepsilon), \ldots, \sigma_n(\varepsilon)$ голоморфные функции ε вблизи $\varepsilon = 0$, то при соблюдении еще некоторых условий действительно можно построить решение $\Psi(t, \varepsilon)$, являющееся голоморфной функцией ε и удовлетворяющее условиям периодичности (12,3).

Рассмотрим снова систему (0,2)

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=0}^{n} \bar{A}_{jk}(t)\, x_k + \varepsilon \sum_{k=0}^{n} A_{jk}(t)\, x_k, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Для упрощения рассуждений предположим, что коэффициенты $\bar{A}_{jk}(t) \equiv a_{jk}$ будут постоянными и что характеристические числа $\sigma_1^{(0)}, \ldots, \sigma_n^{(0)}$ матрицы

$$A^{(0)} = \left\| \begin{matrix} a_{11}, \ldots, a_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}, \ldots, a_{nn} \end{matrix} \right\|$$

все различны.

Положим

$$\left\| \begin{matrix} A_{11}(t), \ldots, A_{1n}(t) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_{n1}(t), \ldots, A_{nn}(t) \end{matrix} \right\| = A(t)$$

и будем какое-либо решение $x_1, \ldots, x_n$ системы (0,2) рассматривать как вектор $\{x(t)\}$. Период матрицы $A(t)$ примем равным 2π. В этих обозначениях система (0,2) запишется так:

$$\frac{d\{x\}}{dt} = [A^{(0)} + \varepsilon A(t)]\{x\}. \qquad (1,4)$$

Получаемая из (1,4) при $\varepsilon = 0$ линейная система будет иметь следующий вид:

$$\frac{d\{\bar{x}\}}{dt} = A^{(0)}\{\bar{x}\}. \qquad (2,4)$$

При достаточно малых значениях ε характеристические показатели $\sigma_1(\varepsilon), \ldots, \sigma_n(\varepsilon)$ системы (1,4) в силу их непрерывной зависимости от ε также будут различными.

Решение системы (1,4), соответствующее характеристическому показателю $\sigma_1(\varepsilon)$,

$$\{x\} = e^{\sigma_1(\varepsilon)t}\{\varphi(t, \varepsilon)\}, \qquad (3,4)$$

при $\varepsilon = 0$ превращается в решение системы (2,4):

$$\{x\} = e^{\sigma_1^{(0)}t}\{\varphi_1\}.$$

Из доказательства леммы, данной нами в предыдущей работе [(1), § 1], видно, что характеристические показатели системы (1,4) будут не только непрерывными, но и *аналитическими* функциями ε.

Допустим, что на основании каких-либо соображений стало известно, что вблизи $\varepsilon = 0$ характеристические показатели системы (1,4) являются голоморфными функциями ε. Тогда мы имеем случай I и решение (3,4) системы (1,4) ищем в виде

$$\{x\} = e^{(\sigma_1^{(0)} + \varepsilon\sigma_1^{(1)} + \ldots)t}\{\varphi_1^{(0)} + \varepsilon\varphi_1^{(1)} + \varepsilon^2\varphi_1^{(2)} + \ldots\}. \qquad (4,4)$$

Имеем

$$\frac{d\{x\}}{dt} = (\sigma_1^{(0)} + \varepsilon\sigma_1^{(1)} + \ldots)e^{\sigma_1 t}\{\varphi_1^{(0)} + \varepsilon\varphi_1^{(1)} + \ldots\} + e^{\sigma_1 t}\{\dot{\varphi}_1^{(0)} + \varepsilon\dot{\varphi}_1^{(1)} + \ldots\}. \qquad (5,4)$$

Подставив (4,4), (5,4) в (1,4) и сравнив коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем (так как $\{\varphi_1^{(0)}\} = \mathrm{const}\}$ для соответствующих—нулевого, первого и второго—приближений:

$$0: \qquad (\sigma_1^{(0)}I - A^{(0)})\{\varphi_1^{(0)}\} = 0, \qquad (6_0,4)$$

$$1: \qquad \{\dot{\varphi}^{(1)}\} + (\sigma_1^{(0)}I - A^{(0)})\{\varphi^{(1)}\} = (A(t) - \sigma_1^{(1)}I)\{\varphi^{(0)}\}, \qquad (6_1,4)$$

$$2: \qquad \{\dot{\varphi}^{(2)}\} + (\sigma_1^{(0)}I - A^{(0)})\{\varphi^{(2)}\} = (A(t) - \sigma_1^{(1)}I)\{\varphi^{(1)}\} - \sigma_1^{(2)}\{\varphi^{(0)}\} \qquad (6_2,4)$$

и т. д.

Чтобы решение (3,4) действительно соответствовало характеристическому показателю $\sigma_1(\varepsilon)$, необходимо и достаточно, чтобы векторы $\{\varphi^{(k)}\}$, $k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяли условиям периодичности

$$\int_0^{2\pi}\{\dot{\varphi}^{(k)}(t)\}\,dt = \left\{\int_0^{2\pi}\dot{\varphi}^{(k)}(t)\,dt\right\} = \{\varphi^{(k)}(2\pi)\} - \{\varphi^k(0)\} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (7,4)$$

Далее, чтобы полностью определить решение (3,4), необходимо еще его нормировать. Потребуем, например, чтобы

$$\varphi_1(0, \varepsilon) = \varphi_{11}^{(0)}, \quad 0 \leqslant \varepsilon < \alpha, \tag{8,4}$$

откуда

$$\varphi_{11}^{(0)}(0) = \varphi_{11}^{(0)}, \quad \varphi_{11}^{(1)}(0) = 0, \quad \varphi_{11}^{(2)} = (0), \ldots \tag{9,4}$$

Проинтегрируем теперь систему (6_1,4) с условиями

$$\int_0^{2\pi} \{\dot{\varphi}^{(1)}\} \, dt = 0 \text{ и } \varphi_{11}^{(1)}(0) = 0. \tag{10_1,4}$$

Как мы покажем ниже, этим $n+1$ условиям можно будет удовлетворить выбором n произвольных постоянных интегрирования и $\sigma_1^{(1)}$.

Затем проинтегрируем систему (6_2,4) с условиями

$$\int_0^{2\pi} \{\dot{\varphi}^{(2)}\} \, dt = 0 \text{ и } \varphi_{11}^{(2)}(0) = 0. \tag{10_2,4}$$

Этим $n+1$ условиям удовлетворяем выбором n произвольных постоянных интегрирования и $\sigma_1^{(2)}$, и т. д.

Заметим, что корни $s_1, s_2, \ldots, s_n$ характеристического уравнения однородной системы

$$\{\dot{\psi}\} + (\sigma_1^{(0)} I - A^{(0)}) \{\psi\} = 0$$

определять не придется, так как они, очевидно, равны

$$s_1 = 0, \quad s_2 = \sigma_2^{(1)} - \sigma_1^{(0)}, \ \ldots, \ s_n = \sigma_n^{(0)} - \sigma_1^{(0)}. \tag{11,4}$$

Таким образом, вычисление характеристического показателя $\sigma(\varepsilon)$ системы (1,4) сводится к последовательному интегрированию системы неоднородных уравнений (6_k,4), $k = 1, 2, \ldots$

Покажем теперь, что уравнениям (10_k,4) действительно можно удовлетворить, при условии, что ни одна из разностей $\sigma_k^{(0)} - \sigma_1^{(0)}$, $k = 2, \ldots, n$, не равна целому числу или нулю. При вычислении каждого следующего приближения придется интегрировать неоднородную систему вида

$$\{\dot{\psi}\} + (\sigma_1^{(0)} I - A^{(0)}) \{\psi\} = \{f(t)\} - \sigma \{\varphi_1^{(0)}\}, \tag{12,4}$$

где $\{f(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikt} \{\gamma^{(k)}\}$, и σ подлежит определению.

Пусть $U(t)$ — матрица фундаментального решения соответствующей однородной системы. Тогда общее решение неоднородной системы (12,4) будет

$$\{\psi(t)\} = U(t)\{C\} + \int_0^t U(t) U^{-1}(\tau) [\{f(\tau)\} - \sigma \{\varphi_1^{(0)}\}] \, d\tau, \tag{13,4}$$

где $\{C\}$ — произвольный постоянный вектор.

Как было показано раньше,

$$U(t) = [e^{s_1 t}, \ldots, e^{s_n t}] \, \Phi^{(0)}; \tag{14,4}$$

здесь $\Phi^{(0)}$ — матрица с постоянными элементами, а числа s_k равны

$$s_k=\sigma_k^{(0)}-\sigma_1^{(0)}, \quad k=1, \ldots, n. \tag{15,4}$$

Так как матрица $\Phi^{(0)}$ представляет собою фундаментальное решение однородной системы, то в каждой ее строке имеется по крайней мере один элемент отличный от нуля. Не ограничивая общности, можно предположить, что нумерация неизвестных $x_1, \ldots, x_n$ выбрана таким образом, что вектор $\{\varphi_1^{(0)}\}=\{\varphi_{11}^{(0)}, \ldots, \varphi_{1n}^{(0)}\}$, удовлетворяющий уравнению $(\sigma_1^{(0)}-A^{(0)})\cdot\{\varphi_1^{(0)}\}=0$, имеет первую составляющую $\varphi_{11}^{(0)}\neq 0$.

Пусть ни одна из разностей $\sigma_k^{(0)}-\sigma_1^{(0)}$, $k=2, \ldots, n$, не равна целому числу. Тогда

$$U(t)=[1, e^{s_2t}, \ldots, e^{s_nt}]\,\Phi^{(0)}. \tag{16,4}$$

Очевидно,

$$U^{-1}(\tau)=\Phi^{(0)^{-1}}[1, e^{-s_2t}, \ldots, e^{-s_nt}]. \tag{17,4}$$

Подставляя (16,4), (14,4) в (13,4), получим

$$\{\psi(t)\}=[1\cdot e^{s_2t}, \ldots, e^{s_nt}]\{C\}+\int_0^t [1, e^{s_2(t-\tau)}, \ldots, e^{s_n(t-\tau)}]\cdot \\ \cdot(\{f(\tau)\}-\sigma\{\varphi_1^{(0)}\})\,d\tau. \tag{18,4}$$

Покажем, что произвольный постоянный вектор $\{C\}$ и величину σ всегда можно выбрать таким образом, чтобы вектор $\{\psi(t)\}$ был периодической функцией t периода 2π. При вычислении интеграла, стоящего в правой части формулы (18,4), встретятся интегралы следующего вида:

$$\int_0^t d\tau=t, \quad \int_0^i e^{ik\tau}d\tau=\frac{1}{ik}(e^{ikt}-1), \quad k\neq 0,$$

$$\int_0^t e^{s_k(t-\tau)}d\tau=\frac{1}{s_k}(e^{s_kt}-1),$$

$$\int_0^i e^{s_k(i-\tau)}e^{i\nu\tau}dt=\frac{e^{i\nu t}-e^{s_kt}}{i\nu-s_k}, \qquad \nu\neq 0.$$

Таким образом, решение (18,4) будет иметь вид

$$\{\psi(t)\}=\Bigg\{C_1-\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{\gamma_1^{(k)}}{ik}+(\gamma_1^{(0)}-\sigma_1^{(1)}\varphi_{11}^{(0)})\,t+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{\gamma_1^{(k)}}{ik}e^{ikt}-$$

$$-\frac{\gamma_2^{(0)}+\varphi_{12}^{(0)}}{s_2}+\left(C_2+\frac{\gamma_2^{(0)}}{s_2}-\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{\gamma_2^{(k)}}{ik-s_2}-\frac{\sigma_1^{(1)}\varphi_{12}^{(0)}}{s_2}\right)e^{s_2t}+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{\gamma_2^{(k)}}{ik-s_2}e^{ikt}-$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\frac{\gamma_n^{(0)}+\varphi_{1n}^{(0)}}{s_n}+\left(C_n+\frac{\gamma_n^{(0)}}{s_n}-\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{\gamma_n^{(k)}}{ik-s_n}-\frac{\sigma_1^{(1)}\varphi_{1n}^{(0)}}{s_n}\right)e^{s_nt}+$$

$$+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{\gamma_n^{(k)}}{ik-s_n}e^{ikt}\Bigg\}. \tag{19.4}$$

Для того, чтобы решение $\{\psi(t)\}$ было периодическим периода 2π, надо уничтожить вековой член в первой составляющей и член $e^{s_\nu t}$ в ν-ой составляющей. Так как $\varphi_{11}^{(0)} \neq 0$, то вековой член можно уничтожить, положив

$$\sigma = \frac{\gamma_1^{(0)}}{\varphi_{11}^{(0)}}. \tag{20,4}$$

Чтобы уничтожить члены вида $e^{s_\nu t}$, выберем произвольные постоянные C_ν $(\nu = 2, \ldots, n)$ следующим образом:

$$C_\nu + \frac{\gamma_\nu^{(0)}}{s_\nu} - \frac{\sigma\varphi_{1\nu}^{(0)}}{s_\nu} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{\gamma_\nu^{(k)}}{ik - s_\nu} = 0, \quad \nu = 2, \ldots, n. \tag{21,4}$$

Значение произвольной постоянной C_1 можно выбрать какое угодно; можно ее, например, положить равной нулю:

$$C_1 = 0. \tag{22,4}$$

Тогда

$$\psi_1(0) = 0.$$

Из этих рассуждений вытекает

ТЕОРЕМА. *Если ни одна из разностей $\sigma_\nu^{(0)} - \sigma_1^{(0)}$, $\nu = 2, \ldots, n$, не равна im, где m — целое число или нуль, то величиной σ, входящей в систему*

$$\{\dot{\psi}\} + (\sigma_1^{(0)} I - A^{(0)})\{\psi\} = \{f(t) - \sigma\{\varphi_1^{(0)}\},$$

и произвольными постоянными $C_1, \ldots, C_n$ можно распорядиться таким образом, чтобы получить периодическое решение этой системы периода 2π.

Построенные таким путем разложения

$$\{\varphi(t, \varepsilon)\} = \{\varphi^{(0)}\} + \varepsilon\{\varphi^{(1)}(t)\} + \varepsilon^2\{\varphi^{(2)}(t)\} + \ldots$$

обязательно выйдут сходящимися при $|\varepsilon|$ достаточно малом, в силу теоремы Ляпунова (§ 2).

Если характеристические показатели не будут голоморфными функциями ε вблизи $\varepsilon = 0$, то или нельзя будет выбрать функции $\{\varphi^{(k)}(t)\}$ так, чтобы они удовлетворяли условиям $(10_k,4)$; или же построенные ряды окажутся расходящимися. В этом случае при построении рядов надо исследовать характер особенной точки $\varepsilon = 0$ и если $\varepsilon = 0$ будет точкой разветвления, то строить ряды вида (6,3); выделив предварительно соответствующую особенность в точке $\varepsilon = 0$.

В предыдущей работе [(1), § 4, § 6] при вычислении критических частот мы нашли, что если отношение $\frac{n_0}{n}$ не будет критическим, то характеристические показатели окажутся действительно голоморфными функциями ε вблизи $\varepsilon = 0$. Если же отношение $\frac{n_0}{n}$ будет критическим, то $\varepsilon = 0$ представляет собою особую точку функции $\sigma_k(\varepsilon)$. Однако (как дальше будет показано), для определения областей неосуществимости достаточно уметь строить разложения лишь *вблизи* критического отношения частот.

Таким образом, случай II не понадобится нам для дальнейшего. Поэтому покажем вкратце, как будет выглядеть процесс вычисления в случае II.

Предположим, для большей простоты, что разложение характеристического показателя $\sigma(\varepsilon)$ имеет вид

$$\sigma(\varepsilon)=\sigma^{(0)}+\sqrt{\varepsilon}\sigma^{(1/2)}+\varepsilon\sigma^{(1)}+\varepsilon\sqrt{\varepsilon}\sigma^{(3/2)}+\ldots=\sigma'(\varepsilon)+\sqrt{\varepsilon}\sigma''(\varepsilon), \quad (23,4)$$

где $\sigma'(\varepsilon)$, $\sigma''(\varepsilon)$ — голоморфные вблизи $\varepsilon=0$ функции ε.

Мы имеем, таким образом, случай II. Ищем решение системы (1,4) в виде

$$\{x\}=e^{(\sigma^{(0)}+\sqrt{\varepsilon}\sigma^{(1/2)}+\ldots)t}\{\varphi^{(0)}+\sqrt{\varepsilon}\varphi^{(1/2)}+\ldots\}. \quad (24,4)$$

Подставляя (24,4) в (1,4) и сравнивая коэффициенты при степенях ε, получим для соответствующих приближений

$$0: \quad (\sigma^{(0)}I-A^{(0)})\{\varphi^{(0)}\}=0, \quad (24_0,4)$$

$$\frac{1}{2}: \quad \{\dot{\varphi}^{(1/2)}\}+(\sigma^{(0)}I-A^{(0)})\{\varphi^{(1/2)}\}=-\sigma^{(1/2)}\{\varphi^{(0)}\}, \quad (24_{1/2},4)$$

$$1: \quad \{\dot{\varphi}^{(1)}\}+(\sigma^{(0)}I-A^{(0)})\{\varphi^{(1)}\}=-\sigma^{(1/2)}\{\varphi^{(1/2)}\}+(A(t)-\sigma^{(1)}I)\{\varphi^{(0)}\}, \quad (24_1,4)$$

$$\frac{3}{2}: \quad \{\dot{\varphi}^{(3/2)}+(\sigma^{(0)}I-A^{(0)})\{\varphi^{(3/2)}\}=-\sigma^{(1/2)}\{\varphi^{(1)}\}+ (A(t)-\sigma^{(1)}I)\{\varphi^{(1/2)}\}-\sigma^{(3/2)}\{\varphi^{(0)}\} \quad (24_{3/2},4)$$

и т. д.

Так как функции $\{\varphi^{(\nu)}(t)\}$ периодические, то должны соблюдаться условия ортогональности

$$\int_0^{2\pi}\{\dot{\varphi}^{(\nu)}(t)\}\,dt=\{\varphi^{(\nu)}(2\pi)\}-\{\varphi^{(\nu)}(0)\}=0, \quad \nu=0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ \ldots \quad (25,4)$$

Для того чтобы полностью определить решение (23,4), необходимо еще его нормировать. Потребуем, чтобы

$$\varphi_1(0,\varepsilon)=\varphi_1^{(0)} \text{ при } 0\leqslant\varepsilon<\alpha, \quad (26,4)$$

откуда получаем начальные условия:

$$\varphi_1^{(0)}(0)=\varphi_1^{(0)},\ \varphi_1^{(1/2)}(0)=0,\ \varphi_1^{(1)}(0)=0,\ \varphi_1^{(3/2)}(0)=0,\ \ldots \quad (27,4)$$

Этим $n+1$ условиям (25,4) и (27,4) можно будет удовлетворить выбором n произвольных постоянных интегрирования $C_1^{(\nu)}, \ldots, C_n^{(\nu)}$ и $\sigma^{(\nu)}$.

Таким образом, в случае II (как и в случае I) вычисление характеристического показателя сводится к последовательному интегрированию систем неоднородных уравнений вида

$$\{\dot{z}^{(\nu)}\}+(\sigma^{(0)}I-A^{(0)})\{z^{(\nu)}\}=\{f^{(\nu)}(t)\}\equiv\{p^{(\nu)}(t)\}+\sigma^{(\nu)}\{q^{(\nu)}(t)\}, \quad (28,4)$$

где $\{p^{(\nu)}(t)\}$ и $\{q^{(\nu)}(t)\}$ — периодические функции t, известные из предыдущих приближений, а $\sigma^{(\nu)}$ подлежит определению.

Замечание. Если в случаях I и II $\nu-1$ приближений уже найдены; то для определения $\sigma^{(\nu)}$ нет необходимости интегрировать систему

ν-го приближения. В самом деле, проинтегрируем уравнения (28,4) в пределах от 0 до 2π. Принимая во внимание условия ортогональности (25,4) и вводя обозначения

$$\int\limits_0^{2\pi} z_j^{(\nu)}\,dt = y_j^{(\nu)}, \quad \int\limits_0^{2\pi} f_j^{(\nu)}(t)\,dt = \delta_j^{(\nu)}, \quad j=1,\ldots,n, \tag{29,4}$$

получим

$$(\sigma^{(0)}I - A^{(0)})\{y^{(\nu)}\} = \{\delta^{(\nu)}\}. \tag{30,4}$$

Рассматривая (30,4) как систему алгебраических уравнений относительно составляющих вектора $\{y^{(\nu)}\}$, видим, что определитель этой неоднородной системы $D(\sigma^{(0)}I - A^{(0)})$ равен нулю*. Для того чтобы она имела решение, необходимо и достаточно, чтобы вектор $\{\delta^{(\nu)}\}$ был ортогонален ко всем линейно независимым решениям соответствующей союзной однородной системы.

Если ранг матрицы равен $n-1$, то условие ортогональности вектора $\{\delta^{(\nu)}\}$ будет иметь вид

$$u_1^{(\nu)}\delta_1^{(\nu)} + \ldots + u_n^{(\nu)}\delta_n^{(\nu)} = 0. \tag{31,4}$$

Если предыдущие приближения уже вычислены, то величина $\sigma^{(\nu)}$ определится из линейного уравнения (31,4) и следовательно, для определения $\sigma^{(\nu)}$ не надо интегрировать систему (28,4).

Так как нулевое приближение представляет собою решение исходной системы и, следовательно, известно, то для определения первой поправки к характеристическому показателю интегрировать уравнения первого приближения не придется; она найдется из уравнения

$$u_1^{(1/2)}\delta_1^{(1/2)} + \ldots + u_n^{(1/2)}\delta_n^{(1/2)} = 0. \tag{32,4}$$

Поэтому: *если окажется, что вещественная часть первой поправки к характеристическому показателю положительна, то этим будет доказано существование области неосуществимости вблизи соответствующего критического отношения частот.*

Отсюда видно, что для решения вопроса о *существовании* областей неосуществимости надо проделать, вообще говоря, весьма простые вычисления, именно составить уравнение (32,4) и найти $\sigma^{(1/2)}$.

На основании теоремы 2 (§ 2) можно утверждать, что $\sigma^{(1/2)}$ обязательно определится из уравнений (32,4). Если $\sigma^{(1/2)} = 0$, то для определения области неосуществимости придется вычислить следующее приближение.

Однако, если $\sigma^{(1/2)} = 0$, то решение системы ($24_{1/2}$,4) напишется сразу, так как система будет однородной, и вычисление следующего приближения $\sigma^{(1)}$ не представит никакого труда.

На первый взгляд предлагаемый метод вычисления характеристических показателей неудобен, так как ряды получаются сходящимися лишь при достаточно малом $|\varepsilon|$, метод же Ляпунова дает ряды, сходящиеся при всех ε.

---

* Так как $\sigma^{(0)}$ — одно из характеристических чисел матрицы.

Не пускаясь в общие рассуждения, покажем в следующих разделах, как в конкретных случаях часто удается построить новые ряды, сходящиеся уже при любых значениях ε.

§ 5

Прежде чем приложить наш метод к исследованию либрационных точек и круговых орбит, покажем применение его к более простому случаю— к уравнению Матье.

Уравнение Матье

$$\ddot{x}+(a^2+\varepsilon\cos 2t)\,x=0 \tag{1,5}$$

после приведения его к нормальной форме имеет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=x_2\,,\\ \frac{dx_2}{dt}&=-(a^2+\varepsilon\cos 2t)\,x_1\,.\end{aligned}\right\} \tag{2,5}$$

В данном случае

$$A^{(0)}=\begin{Vmatrix}0 & 1\\ -a^2 & 0\end{Vmatrix},\quad A(t)=\begin{Vmatrix}0 & 0\\ -\varepsilon\cos 2t & 0\end{Vmatrix} \tag{3,5}$$

Период матрицы $A(t)$ равен π. При $\varepsilon=0$ система (2,5) имеет фундаментальное решение

$$[e^{\sigma_1(0)t}, e^{\sigma_2(0)t}]\,\Psi(t,0)=\begin{Vmatrix}e^{iat} & iae^{iat}\\ e^{-iat} & -iae^{-iat}\end{Vmatrix} \tag{4,5}$$

Корни характеристического уравнения

$$\rho^2-2\alpha(\varepsilon)\,\rho+1=0, \tag{5,5}$$

соответствующего периоду π, при $\varepsilon=0$, будут

$$\rho_1(0)=e^{i\pi a},\quad \rho_2(0)=e^{-i\pi a}. \tag{6,5}$$

Следовательно, $\alpha(0)=\cos\pi a$,

$$\rho(\varepsilon)=\alpha(\varepsilon)\pm\sqrt{\alpha^2(\varepsilon)-1}. \tag{7,5}$$

Чтобы модули обоих корней $|\rho_1|$, $|\rho_2|$ были равны 1, необходимо и достаточно, чтобы $\alpha(\varepsilon)$ было вещественным и $|\alpha(\varepsilon)|\leqslant 1$. Чтобы при $0<|\varepsilon|<\alpha$ модули корней были отличными от 1, необходимо при $\varepsilon=0$

$$|\alpha(0)|=1. \tag{8,5}$$

Уравнение (8,5) определяет критические значения параметра a, именно

$$|\cos\pi a|=1.$$

откуда находим критические значения a:

$$\left.\begin{aligned}\cos\pi a&=1, & a&=2n,\\ \cos\pi a&=-1, & a&=2n+1.\end{aligned}\right\} \tag{9,5}$$

На основании теоремы Ляпунова (§ 2) коэффициент $\alpha(\varepsilon)$ является целой трансцендентной функцией параметра ε, поэтому положим

$$\alpha(\varepsilon)=\alpha_0+\alpha_1\varepsilon+\alpha_2\varepsilon^2+\ldots=\cos\pi a+\alpha_1\varepsilon+\alpha_2\varepsilon^2+\ldots, \qquad (10,5)$$

$$\alpha^2(\varepsilon)=\beta_0+\beta_1\varepsilon+\beta_2\varepsilon^2+\ldots=\cos^2\pi a+2\alpha_1\cos\pi a\cdot\varepsilon+ \\ +(\alpha_1^2+2\alpha_2\cos\pi a)\varepsilon^2+\ldots \qquad (11,5)$$

Из (7,5), (10,5) и (11,5) находим

$$\rho(\varepsilon)=\alpha_0+\alpha_1\varepsilon+\ldots\pm\sqrt{-1+\beta_0+\beta_1\varepsilon+\ldots}= \\ =\cos\pi a+\alpha_1\varepsilon+\ldots\pm i\sqrt{\sin^2\pi a-\beta_1\varepsilon-\beta_2\varepsilon^2+\ldots}. \qquad (12,5)$$

Пусть n — целое число. Из (12,5) видно, что

1° если $a\neq n$, то $\sin^2\pi a\neq 0$ и при достаточно малом $|\varepsilon|$

$$\rho(\varepsilon)=\cos\pi a+\alpha_1\varepsilon+\ldots\pm i\sin\pi a\sqrt{1-\frac{\beta_1\varepsilon+\beta_2\varepsilon^2+\ldots}{\sin^2\pi a}}= \\ =e^{\pm i(\pi a+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\ldots)}, \qquad (13,5)$$

2° если $a=n$, $\beta_1=\beta_2=\ldots=\beta_{s-1}=0$, $\beta_s\neq 0$, то при достаточно малом $|\varepsilon|$

$$\rho(\varepsilon)=(-1)^n+\alpha_1\varepsilon+\ldots\pm\sqrt{\beta_s\varepsilon^s}\cdot\sqrt{1+\frac{\beta_{s+1}}{\beta_s}\varepsilon+\frac{\beta_{s+2}}{\beta_s}\varepsilon^2+\ldots}= \\ =\alpha(\varepsilon)\pm\sqrt{\varepsilon^s}\,P(\varepsilon), \qquad (14,5)$$

где $P(\varepsilon)$ — голоморфная функция ε вблизи $\varepsilon=0$.

Из формулы, связывающей характеристический показатель σ с корнем ρ характеристического уравнения,

$$\sigma=\frac{1}{\pi}\log\rho,$$

и из (14,5) вытекает, что

$$\text{при } a=2n+1: \quad \sigma=\pm[i\pi(2n+1)+P_1(\varepsilon)+\sqrt{\varepsilon^s}\,P_2(\varepsilon)], \qquad (15,5)$$

$$\text{при } a=2n: \quad \sigma=\pm[i\pi\, 2n+P_1(\varepsilon)+\sqrt{\varepsilon^s}\,P_2(\varepsilon)], \qquad (16,5)$$

где $P_1(\varepsilon)$ и $P_2(\varepsilon)$ — голоморфные функции ε вблизи $\varepsilon=0$, причем $P_1(0)=0$. В формулах (15,5), (16,5) определение log взято такое, чтобы при $\varepsilon=0$ $\sigma(0)$ превращался в характеристический показатель исходной линейной системы с постоянными коэффициентами.

Выразим коэффициенты рядов P_1 и P_2 через коэффициенты α_j. При $a=2n$, $\beta_1\neq 0$ и достаточно малом ε

$$\rho(\varepsilon)=1+\alpha_1\varepsilon+\alpha_2\varepsilon^2+\ldots\pm\sqrt{\varepsilon}\sqrt{2\alpha_1}\left[1+\frac{1}{2}\frac{\alpha_1^2+2\alpha_2}{2\alpha_1}\varepsilon+\ldots\right]. \qquad (17,5)$$

При $a=2n+1$, $\beta_1\neq 0$

$$\rho(\varepsilon)=-1+\alpha_1\varepsilon+\alpha_2\varepsilon^2+\ldots\pm\sqrt{\varepsilon}\sqrt{-2\alpha_1}\left[1-\frac{1}{2}\frac{\alpha_1^2-2\alpha_2}{2\alpha_1}\varepsilon+\ldots\right]. \qquad (18,5)$$

Далее, при $a = 2n$

$$\sigma(\varepsilon) = \frac{1}{\pi}\left\{ i\pi 2n + \log\left[1 + \alpha_1\varepsilon + \alpha_2\varepsilon^2 + \ldots \pm \pm \sqrt{\varepsilon}\sqrt{2\alpha_1}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\alpha_1^2 + 2\alpha_2}{2\alpha_1}\varepsilon + \ldots\right)\right]\right\}$$

или

$$\sigma(\varepsilon) = i\cdot 2n \pm \frac{\sqrt{2\alpha_1}}{\pi}\sqrt{\varepsilon} \pm \frac{1}{\pi}\left(\frac{\alpha_1^2 + 2\alpha_2}{\sqrt{2\alpha_1}} - 2\alpha_1\sqrt{2\alpha_1}\right)\varepsilon\sqrt{\varepsilon} + \ldots; \quad (19{,}5)$$

при $a = 2n + 1$

$$\sigma(\varepsilon) = \frac{1}{\pi}\left\{ i\pi(2n+1) + \log\left[-1 + \alpha_1\varepsilon + \alpha_2\varepsilon^2 + \ldots \pm \pm\sqrt{\varepsilon}\sqrt{-2\alpha_1}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\alpha_1^2 - 2\alpha_2}{2\alpha_1}\varepsilon + \ldots\right)\right]\right\} =$$

$$= i(2n+1) + \frac{\sqrt{-2\alpha_1}}{\pi}\sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\alpha_1^2 - 2\alpha_2}{\sqrt{-2\alpha_1}} + 2\alpha_1\sqrt{-2\alpha_1}\right)\varepsilon\sqrt{\varepsilon} + \ldots \quad (20{,}5)$$

Положим, при $a = n$,

$$\sigma = \pm(i\pi n + P_1(\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}P_2(\varepsilon)) = \pm[i\pi n + \gamma_1\varepsilon + \gamma_2\varepsilon^2 + \ldots + \sqrt{\varepsilon}(\delta_0 + \delta_1\varepsilon + \ldots)], \quad (21{,}5)$$

тогда, сравнивая (19,5) и (20,5) с (21,5), находим

$$\text{при } a = 2n: \quad \gamma_1 = 0,\ \delta_0 = \frac{\sqrt{2\alpha_1}}{\pi}, \quad \delta_1 = \frac{1}{2\pi}\frac{2\alpha_2 - 3\alpha_1^2}{\sqrt{2\alpha_1}}, \ldots, \quad (22{,}5)$$

$$\text{при } a = 2n+1: \quad \gamma_1 = 0,\ \delta_0 = \frac{\sqrt{-2\alpha_1}}{\pi}, \quad \delta_1 = -\frac{1}{2\pi}\frac{2\alpha_2 - 3\alpha_1^2}{\sqrt{-2\alpha_1}}, \ldots, \quad (23{,}5)$$

Применяя метод вычисления характеристических показателей, рассмотренный в предыдущем разделе, будем определять непосредственно коэффициенты γ_j и δ_j. Разложения (21,5) сходятся лишь при малом $|\varepsilon|$. Но найдя γ_j и δ_j, мы сможем по формулам (22,5) и (23,5) последовательно вычислить значения $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ Это позволяет для вычисления σ воспользоваться формулой

$$\sigma = \frac{1}{\pi}\{i\,2n\pi + \log[\alpha(\varepsilon) \pm \sqrt{\alpha^2(\varepsilon) - 1}]\}. \quad (24{,}5)$$

Формула (24,5) справедлива при любом значении $|\varepsilon|$, так как ряд $\alpha(\varepsilon) = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon + \alpha_2\varepsilon^2 + \ldots$ представляет собою целую трансцендентную функцию ε.

Переходим теперь к вычислению σ при $a \neq n$ и определению областей неосуществимости.

§ 6

Пусть $a \neq n$. Рассмотрим плоскость (a, ε). Из предыдущего исследования мы видели, что, если $a \neq n$, то существуют столь малые значения $|\varepsilon|$, при которых вещественные части обоих характеристических показателей уравнения Матье равны нулю.

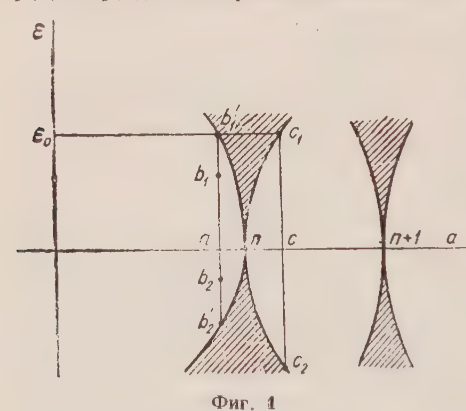
2*

Определение 1. Точку (a, ε) назовем осуществимой, если ей соответствуют характеристические показатели с вещественными частями, равными нулю; в противном случае будем называть ее неосуществимой.

Определение 2. Область плоскости (a, ε), состоящую из осуществимых точек, назовем осуществимой областью; область же, состоящую из неосуществимых точек, назовем неосуществимой.

Возьмем какую-либо точку $(a, 0)$, для которой $a \neq n$. На основании предыдущих рассуждений эта точка осуществимая. Начнем движение из этой точки вдоль прямой, параллельной оси ε. Согласно сказанному выше, найдется такой отрезок b_1b_2, все точки которого будут осуществимыми. Верхнюю грань всевозможных таких отрезков b_1b_2 обозначим через $b'_1b'_2$. Таким образом, непосредственно за b'_1 и b'_2 будут лежать *неосуществимые точки*.

При движении точки a получим кривую (геометрическое место точек $b'_1(a)$ и $b'_2(a)$). Эти кривые отделяют осуществимую область от неосуществимой. При $a \to n$ точки b'_1 и b'_2 стремятся к оси a. Таким образом, общий вид областей неосуществимости будет таким, каким он показан на фиг. 1 (заштрихованные области). Дадим ε_0 определенное значение и проведем через точку ε_0 прямую, параллельную оси a. Эта прямая пересечет кривые $b'_1nb'_2$, c_1nc_2 в точках b'_1 и c_1.



Фиг. 1

Определение 3. Шириной n-ой области неосуществимости при $\varepsilon = \varepsilon_0$ назовем отрезок ac (а также отрезки an и nc).

Предположим, что мы вычислили каким-либо способом коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ Эти коэффициенты будут функциями a. Для определения ширины n-ой области неосуществимости при малом $|\varepsilon|$ подставляем значение ε_0 в ряд

$$-1 + \beta_0 + \beta_1\varepsilon + \beta_2\varepsilon^2 + \ldots$$

и определяем Δa из уравнения

$$-1 + \beta_0(n + \Delta a) + \beta_1(n + \Delta a)\,\varepsilon + \beta_2(n + \Delta a)\,\varepsilon^2 + \ldots = 0.$$

Если ε_0 очень мало; то ограничиваемся лишь первыми членами ряда. Таким образом, при очень малом ε_0 ширина области неосуществимости определится приближенно из уравнения

$$-1 + \beta_0(n + \Delta a) + \beta_1(n + \Delta a)\,\varepsilon_0 \doteq 0.$$

Вычислим ширину n-ой области неосуществимости.

Полагая $a \neq n$, ищем решение уравнения (1,5) в виде

$$x = e^{(ia + \varepsilon\sigma_1 + \ldots)\,t}(\varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + \ldots).$$

Сравнивая коэффициенты при степенях ε, находим для нулевого, первого и второго приближений

0: $\ddot{\varphi}_0 + 2ia\dot{\varphi}_0 = 0,$

1: $\ddot{\varphi}_1 + 2ia\dot{\varphi}_1 = -2\sigma_1 (ia\varphi_0 + \dot{\varphi}_0) - \varphi_0 \cos 2t,$

2: $\ddot{\varphi}_2 + 2ia\dot{\varphi}_2 = -2\sigma_2 (ia\varphi_0 + \dot{\varphi}_0) - 2\sigma_1 (ia\varphi_1 + \dot{\varphi}_1) - \sigma_1^2\dot{\varphi}_0 - \varphi_1 \cos 2t$

и т. д.

При вычислении каждого приближения придется интегрировать линейное неоднородное уравнение вида

$$\ddot{v} + 2ia\dot{v} = f(t), \tag{1,6}$$

где $f(t)$ — периодическая функция периода π, зависящая от σ с соответствующим номером.

Пусть

$$f(t) = \gamma_0 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \gamma_k e^{i2kt} \tag{2,6}$$

(штрих у суммы означает пропуск свободного члена). Общее решение уравнения (1,6) имеет вид

$$v = C_1 + C_2 e^{-2iat} + e^{-2iat} \int_0^t e^{2ia\tau}\, d\tau \int_0^\tau f(u)\, du. \tag{3,6}$$

Рассмотрим интеграл $\int_0^\tau f(u)\, du$. В соответствии с (2,6) имеем

$$\int_0^\tau \left(\gamma_0 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \gamma_k e^{i2ku}\right) du = \gamma_0\tau + \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{\gamma_k}{i2k} e^{i2k\tau} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{\gamma_k}{i2k}.$$

Далее, интеграл

$$\int_0^t e^{2ia\tau} \left(\gamma_0\tau - \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{\gamma_k}{i2k} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{\gamma_k}{i2k} e^{i2k\tau}\right) d\tau,$$

если $\gamma_0 \neq 0$, будет содержать вековой член.

Чтобы v не содержало векового члена, положим

$$\gamma_0 = 0. \tag{4,6}$$

Это уравнение и даст возможность определить σ с соответствующим номером.

Положим $\gamma_0 = 0$ и вычислим интеграл от оставшихся членов; очевидно он равен

$$-\frac{1}{2ia} \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{\gamma_k}{i2k} (e^{2iat} - 1) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{\gamma_k}{2k \cdot 2(k+a)} [e^{i2(k+a)t} - 1].$$

Теперь формула (3,6) будет иметь вид

$$v = C_1 + C_2 e^{-2iat} + \frac{1}{2a} \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{\gamma_k}{2k} - \frac{1}{2a} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{\gamma_k}{2k}\right) \cdot e^{-2iat} +$$

$$+ e^{-2iat} \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{\gamma_k}{2k \cdot 2(k+a)} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{\gamma_k}{2k \cdot 2(k+a)} e^{i2kt}. \tag{5,6}$$

Так как $a \neq n$, то для того, чтобы решение (5,6) было периодическим с периодом π, надо в нем уничтожить члены вида e^{-2iat}. Этого всегда можно достигнуть, выбрав соответствующим образом произвольную постоянную C_2, именно положив

$$C_2 = -\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{\gamma_k}{2k \cdot 2(k+a)} + \frac{1}{2a} \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{\gamma_k}{2k} \tag{6,6}$$

Теперь формула (5,6) примет вид

$$v = C_1 + \frac{1}{2a} \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{\gamma_k}{2k} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{\gamma_k}{2k \cdot 2(k+a)} e^{i2kt}. \tag{7,6}$$

Не ограничивая общности, можно положить*

$$C_1 = -\frac{1}{2a} \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{\gamma_k}{2k}. \tag{8,6}$$

Из этих рассуждений видно, что v всегда можно сделать периодическим периода π, если удастся удовлетворить условию (4,6). Но условию (4,6) всегда можно удовлетворить за счет выбора σ с наибольшим номером, входящего в $f(t)$.

В самом деле,

$$\varphi_0 = C_1 + C_2 e^{-2iat};$$

чтобы сделать φ_0 периодической, полагаем $C_2 = 0$, $C_1 = 1$, тогда

$$\varphi_0 \equiv 1.$$

Уравнение каждого приближения содержит в правой части член

$$-\sigma_n (ia\varphi_0 + \dot{\varphi}_0).$$

Этот член равен $-\sigma_n \cdot ia$ и входит слагаемым в γ_0. Следовательно, σ_n всегда можно выбрать так, чтобы $\gamma_0 = 0$.

Переходим теперь к вычислению приближений. Для нулевого, первого и второго приближений имеем

$$0: \quad \varphi_0 \equiv 1.$$

По формуле (7,6) определяем φ_1, предварительно найдя σ_1;

$$1: \qquad \sigma_1 = 0, \qquad \varphi = \frac{e^{i2t}}{8(1+a)} + \frac{e^{-i2t}}{8(1-a)}.$$

Составляем правую часть уравнения для φ_2, находим σ_2 и затем по (7,6) φ_2:

$$2: \qquad \sigma_2 = \frac{i}{16a(1-a^2)}, \qquad \varphi_2 = \frac{e^{i4t}}{128(1+a)(2+a)} - \frac{e^{-i4t}}{128(1-a)(2-a)}.$$

По найденным величинам $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ вычислим коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ разложения $\rho(\varepsilon)$. Из формулы (13,5) находим

$$\rho(\varepsilon) = e^{\pm i\pi a} + \left(\alpha_1 \mp \frac{i\beta_1}{2\sin \pi a}\right)\varepsilon + \left(\alpha_2 \mp \frac{i\beta_2}{2\sin \pi a} \mp \frac{i\beta_1^2}{8\sin^3 \pi a}\right)\varepsilon^2 + \ldots$$

Подставляя сюда вместо коэффициентов $\beta_1, \beta_2, \ldots$ их выражения через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$

$$\beta_1 = 2\alpha_1 \cos \pi a, \qquad \beta_2 = \alpha_1^2 + 2\alpha_2 \cos \pi a.$$

* Умножая решение $e^{\sigma(\varepsilon)t}(\varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + \ldots)$ на ряд $c_0 + c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + \ldots$, можно распоряжаться начальными условиями, выбирая $c_0, c_1, c_2, \ldots$ надлежащим образом.

получим

$$\rho(\varepsilon) = e^{\pm i\pi a}\{1 + (1 \mp i\,\mathrm{ctg}\,\pi a)\,e^{\mp i\pi a}\cdot\alpha_1\varepsilon +$$
$$+ e^{\mp i\pi a}\left[\alpha_2(1 \mp i\,\mathrm{ctg}\,\pi a) \mp \left(\frac{i}{2\sin\pi a} + \frac{i\cos^2\pi a}{2\sin^3\pi a}\right)\alpha_1^2\right]\varepsilon^2 + \ldots \qquad (9,6)$$

Далее из (9,6) находим

$$\sigma(\varepsilon) = \frac{1}{\pi}\log\rho(\varepsilon) = \pm ia + \frac{1}{\pi}\log\left\{1 + (1 \mp i\,\mathrm{ctg}\,\pi a)\,e^{\mp i\pi a}\alpha_1\varepsilon +\right.$$
$$\left.+ e^{\mp i\pi a}\left[\alpha_2(1 \mp i\,\mathrm{ctg}\,\pi a) \mp \left(\frac{i}{2\sin\pi a} + \frac{i\cos^2\pi a}{2\sin^3\pi a}\right)\alpha_1^2\right]\varepsilon^2 + \ldots\right\}.$$

Разлагая log в ряд, получим

$$\sigma(\varepsilon) = \pm ia + \frac{1}{\pi}(1 \mp i\,\mathrm{ctg}\,\pi a)\,e^{\mp i\pi a}\alpha_1\varepsilon + \left\{\frac{1}{\pi}\left[\alpha_2(1 \mp i\,\mathrm{ctg}\,\pi a) \mp\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{i}{2\sin\pi a} + \frac{i\cos^2\pi a}{2\sin^3\pi a}\right)\alpha_1^2\right] e^{\mp i\pi a} - \frac{1}{2\pi}(1 + i\,\mathrm{ctg}\,\pi a)^2 e^{\mp 2i\pi a}\alpha_1^2\right\}\varepsilon^2 + \ldots \qquad (10,6)$$

Но с другой стороны,

$$\sigma(\varepsilon) = ia + \sigma_1\varepsilon + \sigma_2\varepsilon^2 + \ldots, \qquad (11,6)$$

где

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = \frac{i}{16a(1-a^2)}.$$

Сравнивая коэффициенты при степенях ε в разложениях (10,6) и (11,6), находим

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -\frac{\pi\sin\pi a}{16a(1-a^2)}, \ldots \qquad (12,6)$$

Таким образом с точностью до величин 2-го порядка получаем следующее разложение:

$$\rho(\varepsilon) = \cos\pi a - \frac{\pi\sin\pi a}{16a(1-a^2)}\varepsilon^2 + \ldots \pm i\sin\pi a\sqrt{1 + \frac{\pi\cos\pi a}{8a(1-a^2)\sin\pi a}\varepsilon^2 + \ldots} \qquad (13,6)$$

Это разложение сходится при любом значении ε.

Ширина области неосуществимости Δa вблизи критического значения $a = n$, соответствующая ε_0, приближенно определится из уравнения

$$1 + \frac{\pi\cos(n\pi + \pi\Delta a)\,\varepsilon_0^2}{8(n + \Delta a)[1 - (n + \Delta a)^2]\sin(n\pi + \pi\Delta a)} = 0.$$

Считая Δa малым по сравнению с n, приближенно получим

$$\Delta a \doteq \frac{\varepsilon_0^2}{8n(n^2-1)}. \qquad (14,6)$$

При $\varepsilon_0^2 > 8n(n^2-1)\Delta a$ у характеристического показателя появится вещественная часть.

Отсюда видно, что область неосуществимости, по крайней мере в первом приближении, симметрична относительно оси a и что с возрастанием n ширина областей неосуществимости убывает.

При $n = 2, 3, 4$ для соответствующих Δa получим

$$\Delta a \doteq \frac{\varepsilon_0^2}{48}, \quad \Delta a \doteq \frac{\varepsilon_0^2}{192}, \quad \Delta a \doteq \frac{\varepsilon_0^2}{480}. \qquad (15,6)$$

§ 7

Пользуясь тем же методом, исследуем области неосуществимости, лежащие вблизи критических частот, для либрационной точки L_4.

Установим связь между разложениями коэффициентов $B_1(\varepsilon)$, $B_2(\varepsilon)$ характеристического уравнения

$$\rho^4 + 2B_1(\varepsilon)\rho^3 + 2B_2(\varepsilon)\rho^2 + 2B_1(\varepsilon)\rho + 1 = 0 \qquad (1,7)$$

и разложениями характеристических показателей. Корни возвратного уравнения (1,7) выражаются формулами:

$$\left.\begin{aligned}
2\rho_1 &= -B_1+\sqrt{B_1^2+2-2B_2}+\sqrt{2B_1^2-2-2B_2-2B_1\sqrt{B_1^2+2-2B_2}},\\
2\rho_2 &= -B_1-\sqrt{B_1^2+2-2B_2}+\sqrt{2B_1^2-2-2B_2+2B_1\sqrt{B_1^2+2-2B_2}},\\
2\rho_3 &= -B_1+\sqrt{B_1^2+2-2B_2}-\sqrt{2B_1^2-2-2B_2-2B_1\sqrt{B_1^2+2-2B_2}},\\
2\rho_4 &= -B_1-\sqrt{B_1^2+2-2B_2}-\sqrt{2B_1^2-2-2B_2+2B_1\sqrt{B_1^2+2-2B_2}}.
\end{aligned}\right\}\quad(2.7)$$

В предыдущей работе [(1), § 4] мы получили следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned}
B_1(0) &= -(\cos\omega_1 T+\cos\omega_2 T),\\
B_2(0) &= 1+\cos(\omega_1+\omega_2)T+\cos(\omega_1-\omega_2)T,\\
B_1^2(0)+2-2B_2(0) &= (\cos\omega_1 T-\cos\omega_2 T)^2.
\end{aligned}\right\}\quad(3,7)$$

На основании теоремы Ляпунова (2) коэффициенты $B_1(\varepsilon)$, $B_2(\varepsilon)$ являются целыми трансцендентными функциями ε. Положим

$$\left.\begin{aligned}
B_1(\varepsilon) &= a_0+a_1\varepsilon+a_2\varepsilon^2+\dots\\
B_2(\varepsilon) &= b_0+b_1\varepsilon+b_2\varepsilon^2+\dots
\end{aligned}\right\}\quad(4,7)$$

Найдем первые члены разложений по степеням ε следующих величин:

$$\begin{aligned}
\sqrt{B_1^2(\varepsilon)+2-2B_2(\varepsilon)} &= \sqrt{a_0^2+2-2b_0}\Big\{1+\frac{a_0a_1-b_1}{a_0^2+2-2b^0}\varepsilon+\\
&+\Big[\frac{a_1^2+2a_0a_2-2b_2}{2(a_0^2+2-2b_0)}-\frac{(a_0a_1-b_1)^2}{2(a_0^2+2-2b_0)^2}\Big]\varepsilon^2+\dots\Big\}.
\end{aligned}\quad(5,7)$$

$$\begin{aligned}
&2B_1^2(\varepsilon)-2-2B_2(\varepsilon)-2B_1(\varepsilon)\sqrt{B_1^2(\varepsilon)+2-2B_2(\varepsilon)}=\\
&=(2a_0^2-2-2b_0-2a_0\sqrt{a_0^2+2-2b_0})+\\
&+\Big\{4a_0a_1-2b_1-2\sqrt{a_0^2+2-2b_0}\Big[a_1+\frac{a_0(a_0a_1-b_1)}{a_0^2+2-2b_0}\Big]\Big\}\varepsilon+\\
&+\Big\{2(a_1^2+2a_0a_1)-2b_2-2\sqrt{a_0^2+2-2b_0}\Big[a_2+\frac{a_1(a_0a_1-b_1)}{a_0^2+2-2b_0}+\\
&+a_0\Big(\frac{a_1^2+2a_0a_2-2b_2}{2(a_0^2+2-2b_0)}-\frac{(a_0a_1-b_1)^2}{2(a_0^2+2-2b_0)^2}\Big)\Big]\Big\}\varepsilon^2+\dots
\end{aligned}\quad(6.7)$$

$$\begin{aligned}
&2B_1^2(\varepsilon)-2-2B_2(\varepsilon)+2B_1(\varepsilon)\sqrt{B_1^2(\varepsilon)+2-2B_2(\varepsilon)}=\\
&=(2a_0^2-2-2b_0+2a_0\sqrt{a_0^2+2-2b_0})+\\
&+\Big\{4a_0a_1-2b_1+2\sqrt{a_0^2+2-2b_0}\Big[a_1+\frac{a_0(a_0a_1-b_1)}{a_0^2+2-2b_0}\Big]\Big\}\varepsilon+\\
&+\Big\{2(a_1^2+2a_0a_1)-2b_2+2\sqrt{a_0^2+2-2b_0}\Big[a_2+\frac{a_1(a_0a_1-b_1)}{a_0^2+2-2b_0}+\\
&+a_0\Big(\frac{a_1^2+2a_0a_2-2b_2}{2(a_0^2+2-2b_0)}-\frac{(a_0a_1-b_1)^2}{2(a_0^2+2-2b_0)^2}\Big)\Big]\Big\}\varepsilon^2+\dots
\end{aligned}\quad(7,7)$$

Далее, из (3,7) и (4,7) получаем

$$\left.\begin{aligned}
\sqrt{a_0^2+2-2b_0} &= \cos\omega_1 T-\cos\omega_1 T,\\
2a_0^2-2-2b_0-2a_0\sqrt{a_0^2+2-2b_0} &= -4\sin^2\omega_1 T,\\
2a_0^2-2-2b_0+2a_0\sqrt{a_0^2+2-2b_0} &= -4\sin^2\omega_2 T,
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
-a_0+\sqrt{a_0^2+2-2b_0}+\sqrt{2a_0^2-2-2b_0-2a_0\sqrt{a_0^2+2-2b_0}} &= 2e^{i\omega_1 T},\\
-a_0-\sqrt{a_0^2+2-2b_0}+\sqrt{2a_0^2-2-2b_0+2a_0\sqrt{a_0^2+2-2b_0}} &= 2e^{i\omega_2 T}.
\end{aligned}\right\}$$

Пользуясь приведенными в этом разделе формулами, легко находим

$$\left.\begin{aligned} \rho_1(\varepsilon) &= e^{i\omega_1 T}\left[1 - \frac{2a_1\cos\omega_1 T + b_1}{2i\sin\omega_1 T(\cos\omega_1 T - \cos\omega_2 T)}\cdot\varepsilon + \ldots\right], \\ \rho_2(\varepsilon) &= e^{i\omega_2 T}\left[1 + \frac{2a_1\cos\omega_1 T + b_1}{2i\sin\omega_2 T(\cos\omega_1 T - \cos\omega_2 T)}\cdot\varepsilon + \ldots\right]. \end{aligned}\right\} \quad (8,7)$$

По формуле $\sigma = \log\rho$ находим, разлагая $\log\rho$ в ряд по степеням ε,

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1(\varepsilon) &= i\omega_1 + \frac{2a_1\cos\omega_1 T + b_1}{2i\sin\omega_1 T(\cos\omega_1 T - \cos\omega_2 T)}\cdot\varepsilon + \ldots, \\ \sigma_2(\varepsilon) &= i\omega_2 + \frac{2a_1\cos\omega_1 T + b_1}{2i\sin\omega_2 T(\cos\omega_1 T - \cos\omega_2 T)}\cdot\varepsilon + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (9,7)$$

С другой стороны,*

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1(\varepsilon) &= \sigma_1^{(0)} + \varepsilon\sigma_1^{(1)} + \varepsilon^2\sigma_1^{(2)} + \ldots, \\ \sigma_2(\varepsilon) &= \sigma_2^{(0)} + \varepsilon\sigma_2^{(1)} + \varepsilon^2\sigma_2^{(2)} + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (10,7)$$

Сравнивая разложения (9,7) и (10,7), находим выражения для коэффициентов a_1, b_1 и т. д.**

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= i(\sigma_1^{(1)}\sin\omega_1 T - \sigma_2^{(1)}\sin\omega_2 T), \\ b_1 &= 2i(-\sigma_1^{(1)}\sin\omega_1 T\cos\omega_2 T + \sigma_2^{(1)}\cos\omega_1 T\sin\omega_2 T. \end{aligned}\right\} \quad (11,7)$$

Радиус сходимости рядов (9,7) неизвестен. Поэтому для вычисления ширины области неосуществимости надо пользоваться формулами

$$\left.\begin{aligned} 2\alpha_1(\varepsilon) &= -B_1(\varepsilon) + \sqrt{B_1^2(\varepsilon) + 2 - 2B_2(\varepsilon)}, \\ 2\alpha_2(\varepsilon) &= -B_1(\varepsilon) - \sqrt{B_1^2(\varepsilon) + 2 - 2B_2(\varepsilon)}. \end{aligned}\right\} \quad (12,7)$$

Уравнения для определения ширины области неосуществимости будут

$$B_1^2(\varepsilon) + 2 - 2B_2(\varepsilon) = 0, \quad (13_1,7)$$

$$|\alpha_1(\varepsilon)| = 1, \quad (13_2,7)$$

$$|\alpha_2(\varepsilon)| = 1. \quad (13_3,7)$$

Из формул (3,7), (5,7) и (11,7) находим

$$B_1^2(\varepsilon) + 2 - 2B_2(\varepsilon) = (\cos\omega_2 T - \cos\omega_1 T)\cdot$$

$$\cdot\{(\cos\omega_2 T - \cos\omega_1 T) + 2i[\sigma_1^{(1)}\sin\omega_1 T + \sigma_2^{(1)}\sin\omega_2 T]\varepsilon + \ldots\}, \quad (14,7)$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1(\varepsilon) &= \cos\omega_1 T - \frac{i}{2}(3\sigma_1^{(1)}\sin\omega_1 T + \sigma_2^{(1)}\sin\omega_2 T)\varepsilon + \ldots, \\ \alpha_2(\varepsilon) &= \cos\omega_2 T + \frac{i}{2}(\sigma_1^{(1)}\sin\omega_1 T + 3\sigma_2^{(1)}\sin\omega_2 T)\varepsilon + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (15,7)$$

Определим области неосуществимости; лежащие вблизи критических частот, определяемых уравнением

$$B_1^2(0) + 2 - 2B_2(0) = 0.$$

Исследуем случай, соответствующий тому, что мы имеем в солнечной системе. Сатурн является *внешней* планетой по отношению к Юпитеру, а это значит; что среднее суточное движение Сатурна n_0 меньше среднего суточного движения Юпитера n,

$$n_0 < n.$$

---

* Вычисление $\sigma_j^{(k)}$ дано ниже.

** Формулы (11,7) применимы не только для данной задачи, но для всякой системы 4-го порядка вида $\frac{dX}{dt} = X[A^{(0)} + \varepsilon A(t)]$ при условии, что соответствующее ей при $\varepsilon = 0$ характеристическое уравнение возвратное и обладает двумя различными парами чисто мнимых сопряженных корней.

Будем считать n фиксированным, а n_0 будем рассматривать как переменный параметр.

В предыдущей работе [(1), § 4] было выведено уравнение, определяющее критические частоты,

$$\frac{n_0}{n}=1-\frac{1}{k}\left\{\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\nu}}{2}}\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\nu}}{2}}\right\},\quad k=\pm 1, \pm 2, \ldots \tag{16,7}$$

Будем давать k лишь положительные значения. Тогда, чтобы n_0 было меньше n, надо в уравнении (16,7) взять верхний знак $+$, т. е., согласно введенным в предыдущей работе обозначениям,

$$\frac{n_0}{n}=1-\frac{1}{k}\Phi_1(\nu),\quad k=1, 2, \ldots \tag{17,7}$$

Обозначим через $n_0^{(k)}$ критическую частоту, определяемую уравнением (17,7) и соответствующую значению k. Положим

$$n_0=n_0^{(k)}+\delta^{(k)}$$

и определим ширину области неосуществимости $\sigma^{(k)}$, лежащую вблизи критической частоты $n_0^{(k)}$. По формулам (24) предыдущей работы [(1), § 4]

$$\left.\begin{aligned}\omega_1 T&=\frac{2\pi n}{n-(n_0^{(k)}+\delta^{(k)})}\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\nu}}{2}},\\ \omega_2 T&=\frac{2\pi n}{n-(n_0^{(k)}+\delta^{(k)})}\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\nu}}{2}},\end{aligned}\right\}$$

или, разлагая по степеням $\delta^{(k)}$ (считая его весьма малым),

$$\left.\begin{aligned}\omega_1 T&=\Omega_1^0+\frac{\Omega_1^0}{n\left(1-\frac{n_0^{(k)}}{n}\right)}\delta^{(k)}+\ldots,\\ \omega_2 T&=\Omega_2^0+\frac{\Omega_2^0}{n\left(1-\frac{n_0^{(k)}}{n}\right)}\delta^{(k)}+\ldots,\end{aligned}\right\} \tag{18,7}$$

где

$$\Omega_1^0=\frac{2\pi\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\nu}}{2}}}{1-\frac{n_0^{(k)}}{n}},\quad \Omega_2^0=\frac{2\pi\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\nu}}{2}}}{1-\frac{n_0^{(k)}}{n}}. \tag{18',7}$$

Считая $\delta^{(k)}$ весьма малым, полагаем приближенно

$$\left.\begin{aligned}\sin\omega_j T&\doteq\sin\Omega_j^0+\frac{\Omega_j^0\cos\Omega_j^0}{n\left(1-\frac{n_0^{(k)}}{n}\right)}\cdot\delta^{(k)},\\ &\qquad\qquad (j=1,2)\\ \cos\omega_j T&\doteq\cos\Omega_j^0-\frac{\Omega_j^0\sin\Omega_j^0}{n\left(1-\frac{n_0^{(k)}}{n}\right)}\cdot\delta^{(k)}.\end{aligned}\right\} \tag{19,7}$$

Ширина области неосуществимости получится приближенно, если мы приравняем правую часть (14,7) нулю (ε полагаем весьма малым):

$$\cos\omega_2 T-\cos\omega_1 T+2i\,[\sigma_1^{(1)}\sin\omega_1 T+\sigma_2^{(1)}\sin\omega_2 T]\,\varepsilon\doteq 0. \tag{20,7}$$

Подставляя в (20,7) вместо sin, cos их приближенные выражения из (19,7) и решая полученное уравнение относительно $\delta^{(k)}$, найдем

$$\delta^{(k)}=\frac{-2i\varepsilon n\left(1-\frac{n_0^{(k)}}{n}\right)(\sigma_1^{(1)}\sin\Omega_1^0+\sigma_2^{(1)}\sin\Omega_2^0)}{\Omega_1^0\sin\Omega_1^0-\Omega_2^0\sin\Omega_2^0+2i\varepsilon\,(\sigma_1^{(1)}\,\Omega_1^0\cos\Omega_1^0+\sigma_2^{(1)}\,\Omega_2^0\cos\Omega_2^0)}. \tag{21,7}$$

Заменяя $1-\frac{n_0^{(k)}}{n}$ при помощи формулы (17,7) и выражая Ω_2^0 через Ω_1^0:

$$\Omega_1^0+\Omega_2^0=2k\pi,$$

получим

$$\delta^{(k)}=\frac{-i\varepsilon n\Phi_1(\nu)(\sigma_1^{(1)}-\sigma_2^{(1)})\sin\Omega_1^0}{\pi k^2\sin\Omega_1^0+i\varepsilon\cos\Omega_1^0\left[2\pi k^2\sigma_2^{(1)}+k\Omega_1^0(\sigma_1^{(1)}-\sigma_2^{(1)})\right]}. \qquad (22,7)$$

Аналогичным образом легко определить области неосуществимости, лежащие вблизи критических частот, определяемых уравнением

$$|\alpha_1(0)|=1 \text{ при } B_1^2(0)+2-2B_2(0)>0$$

(иначе будет предыдущий случай). Эти критические частоты определяются формулами [(1), § 4]

$$\frac{n_0^{(k)}}{n}=1-\frac{1}{k}\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\nu}}{2}}, \qquad (23_1,7)$$

$$\frac{n_0^{(k)}}{n}=1-\frac{2}{2k+1}\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\nu}}{2}}. \qquad (23_2,7)$$

Полагая $n_0=n_0^{(k)}+\delta^{(k)}$ и воспользовавшись уравнениями $(13_2,7)$ и $(23_1,7)$, $(23_2,7)$ (или соответственно $(13_3,7)$ и т. д.), получим искомые соотношения. Так как в дальнейшем нам не придется пользоваться этими соотношениями, то мы их здесь не приводим.

§ 8

Остается вычислить величины $\sigma_1^{(1)}$ и $\sigma_2^{(1)}$. Для этого воспользуемся методом, изложенным в § 4. Мы ограничимся лишь вторым приближением.

Ищем решение системы (23) [(1), § 3] в виде

$$\left.\begin{aligned}\tilde z_1&=(A_1+\varepsilon\vartheta_1(t)+\varepsilon^2\theta_1(t)+\ldots)e^{(i\omega_1+\varepsilon\sigma_1^{(1)}+\varepsilon^2\sigma_1^{(2)}+\ldots)t},\\ \tilde z_2&=(B_1+\varepsilon\vartheta_2(t)+\varepsilon^2\theta_2(t)+\ldots)e^{(i\omega_1+\varepsilon\sigma_1^{(1)}+\varepsilon^2\sigma_1^{(2)}+\ldots)t}.\end{aligned}\right\} \qquad (1,8)$$

Подставив в уравнения (23) [(1), § 3] соответствующие значения для $\tilde z_1$ и $\tilde z_2$ из (1,8) и сравнив коэффициенты при степенях ε, получим для нулевого, первого и второго приближений

$$0:\quad \left.\begin{aligned}(\omega_1^2+\Omega_{11})A_1+(\Omega_{11}+2ni\omega_1)B_1=0,\\ (\Omega_{12}-2ni\omega_1)A_1+(\omega_1^2+\Omega_{22})B_1=0,\end{aligned}\right\} \qquad (2_0,8)$$

откуда

$$\Delta\equiv(\omega_1^2+\Omega_{11})(\omega_1^2+\Omega_{22})-(\Omega_{12}-2ni\omega_1)(\Omega_{12}+2ni\omega_1)=0;$$

$$1:\quad \left.\begin{aligned}&\ddot\vartheta_1+2i\omega_1\dot\vartheta_1-2n\dot\vartheta_2-(\omega_1^2+\Omega_{11})\vartheta_1-(\Omega_{12}+2ni\omega_1)\vartheta_2=\\&\qquad=A_1A_{11}(t)+B_1A_{12}(t)+2\sigma_1^{(1)}(-i\omega_1A_1+nB_1),\\&\ddot\vartheta_2+2i\omega_1\dot\vartheta_2-2n\dot\vartheta_1-(\Omega_{12}-2ni\omega_1)\vartheta_1-(\omega_1^2+\Omega_{22})\vartheta_2=\\&\qquad=A_1A_{12}(t)+B_1A_{22}(t)+2\sigma_1^{(1)}(-nA_1-i\omega_1B_1);\end{aligned}\right\} \qquad (2_1,8)$$

$$2:\quad \left.\begin{aligned}&\ddot\theta_1+2i\omega_1\dot\theta_1-2n\dot\theta_2-(\omega_1^2+\Omega_{11})\theta_1-(\Omega_{12}+2ni\omega_1)\theta_2=\\&\qquad=-2\sigma_1^{(1)}\dot\vartheta_1-2i\omega_1\sigma_1^{(1)}\vartheta_1+A_{11}(t)\vartheta_1+A_{12}(t)\vartheta_2+\\&\qquad+2n\sigma_1^{(1)}\vartheta_2-[(\sigma_1^{(1)})^2+2i\omega_1\sigma_1^{(2)}]A_1+2n\sigma_1^{(2)}B_1,\\&\ddot\theta_2+2i\omega_1\dot\theta_2+2n\dot\theta_1-(\Omega_{12}-2ni\omega_1)\theta_1-(\omega_1^2+\Omega_{22})\theta_2=\\&\qquad=-2\sigma_1^{(1)}\dot\vartheta_2-2i\omega_1\sigma_1^{(1)}\vartheta_2+A_{12}(t)\vartheta_1+\\&\qquad+A_{22}(t)\vartheta_2-2n\sigma_1^{(1)}\vartheta_1-[(\sigma_1^{(1)})^2+2i\omega_1\sigma_1^{(2)}]B_1-2n\sigma_1^{(2)}A_1.\end{aligned}\right\} \qquad (2_2,8)$$

Обозначим свободные члены системы $(2_1,8)$ через $f_1(t)$, $f_2(t)$, а свободные члены системы $(2_2;8)$ через $F_1(t)$, $F_2(t)$. Пользуясь символическим методом, можно системы $(2_1,8)$ и $(2_2,8)$ записать так:

$$\left.\begin{aligned}&[D^2+2i\omega_1 D-(\omega_1^2+\Omega_{11})]\,\vartheta_1-[2nD+(2ni\omega_1+\Omega_{12})]\,\vartheta_2=f_1(t),\\&[2nD+(2ni\omega_1-\Omega_{12})]\,\vartheta_1+[D^2+2i\omega_1 D-(\omega_1^2+\Omega_{22})]\,\vartheta_2=f_2(t);\end{aligned}\right\}\quad(3_1,8)$$

$$\left.\begin{aligned}&[D^2+2i\omega_1 D-(\omega_1^2+\Omega_{11})]\,\theta_1-[2nD+(2ni\omega_1+\Omega_{12})]\,\theta_2=F_1(t),\\&[2nD+(2ni\omega_1-\Omega_{12})]\,\theta_1+[D^2+2i\omega_1 D-(\omega_1^2+\Omega_{22})]\,\theta_2=F_2(t).\end{aligned}\right\}\quad(3_2,8)$$

Характеристическое уравнение для систем $(3_1,8)$ и $(3_2,8)$ будет одно и то же:

$$\Delta(D)\equiv\begin{vmatrix}D^2+2i\omega_1 D-(\omega_1^2+\Omega_{11}) & -2nD-(2ni\omega_1+\Omega_{12})\\ 2nD+(2ni\omega_1-\Omega_{12}) & D^2+2i\omega_1 D-(\omega_1^2+\Omega_{22})\end{vmatrix}=0. \quad (4,8)$$

Согласно § 4 корни уравнения (4,8) соответственно равны

$$D_1=0,\quad D_2=i(\omega_2-\omega_1),\quad D_3=-2i\omega_1,\quad D_4=-i(\omega_1+\omega_2). \quad (5,8)$$

Таким образом, общее решение однородной системы, соответствующей системам $(3_1,8)$ и $(3_2,8)$, имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}&\theta_1=C_1+C_2e^{i(\omega_2-\omega_1)t}+C_3e^{-2i\omega_1 t}+C_4e^{-i(\omega_1+\omega_2)t},\\&\theta_2=C_1'+C_2'e^{i(\omega_2-\omega_1)t}+C_3'e^{-2i\omega_1 t}+C_4'e^{-i(\omega_1+\omega_2)t},\end{aligned}\right\}\quad(6,8)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные, а постоянные C_1', C_2', C_3', C_4' связаны с ними определенными соотношениями.

Из формулы (6,8) видно, что однородная система, соответствующая системам $(3_1,8)$ и $(3_2,8)$, имеет единственное* решение

$$\psi_1=C_1=A_1,\quad \psi_2=C_1'=B_1, \quad (7,8)$$

удовлетворяющее граничным условиям периодичности

$$\left.\begin{aligned}&\psi_1(0)=\psi_1(T),\quad \psi_2(0)=\psi_2(T),\\&\dot\psi_1(0)=\dot\psi_1(T),\quad \dot\psi_2(0)=\dot\psi_2(T).\end{aligned}\right\}\quad(8,8)$$

Для того чтобы неоднородная система $(3_1,8)$ имела решение, удовлетворяющее таким же условиям периодичности; необходимо и достаточно, чтобы ее свободные члены удовлетворяли соответствующим условиям ортогональности. Эти условия проще всего вывести следующим образом. Составим из системы $(2_1,8)$ новую систему. Для этого умножим первое уравнение $(2_1,8)$ на $\omega_1^2+\Omega_{22}$ и второе уравнение $(2_1,8)$ на $-(\Omega_{12}+2ni\omega_1)$ и сложим, затем первое уравнение $(2_1,8)$ умножим на $-(\Omega_{12}-2ni\omega_1)$; а второе уравнение $(2_1,8)$ на $(\omega_1^2+\Omega_{11})$ и сложим. Тогда получим систему

$$\left.\begin{aligned}&(\omega_1^2+\Omega_{22})\,[\ddot\vartheta_1+2i\omega_1\dot\vartheta_1-2n\dot\vartheta_2-f_1(t)]-\\&\quad-(\Omega_{12}+2ni\omega_1)\,[\ddot\vartheta_2+2i\omega_1\dot\vartheta_2+2n\dot\vartheta_1-f_2(t)]=0,\\&(\Omega_{12}-2ni\omega_1)\,[\ddot\vartheta_1+2i\omega_1\dot\vartheta_1-2n\dot\vartheta_2-f_1(t)]+\\&\quad+(\omega_1^2+\Omega_{11})\,[\ddot\vartheta_2+2i\omega_1\dot\vartheta_2+2n\dot\vartheta_1-f_2(t)]=0.\end{aligned}\right\}\quad(9,8)$$

Рассматривая (9,8) как алгебраическую систему относительно выражений,

---

* При условии, что $\frac{n_0}{n}$ не равно критической частоте, что мы здесь и предполагаем.

стоящих в квадратных скобках, и замечая, что определитель системы $\Delta=0$, заключаем, что она имеет отличное от нуля решение

$$\begin{aligned}(\omega_1^2+\Omega_{11})\,[\ddot{\vartheta}_2+2i\omega_1\dot{\vartheta}_2+2n\dot{\vartheta}_1-f_2(t)]=\\=(\Omega_{11}-2ni\omega_1)\,[\ddot{\vartheta}_1+2i\omega_1\dot{\vartheta}_1-2n\dot{\vartheta}_2-f_1(t)],\end{aligned}\tag{10,8}$$

в котором квадратной скобке, стоящей в правой части равенства, можно придавать произвольные значения. Так как функции $\vartheta_1(t)$, $\vartheta_2(t)$ должны быть периодическими с периодом $T=\frac{2\pi}{n-n_0}$, то имеют место равенства

$$\left.\begin{aligned}\int_0^T\dot{\vartheta}_1(t)\,dt=0,\qquad \int_0^T\dot{\vartheta}_2(t)\,dt=0,\\ \int_0^T\ddot{\vartheta}_1(t)\,dt=0,\qquad \int_0^T\ddot{\vartheta}_2(t)\,dt=0.\end{aligned}\right\}\tag{11,8}$$

Интегрируя (10,8) в пределах от 0 до T, получим согласно (11,8)

$$(\omega_1^2+\Omega_{11})\int_0^T f_2(t)\,dt=(\Omega_{12}-2ni\omega_1)\int_0^T f_1(t)\,dt.\tag{12,8}$$

Подставляя в (12,8) вместо $f_1(t)$ и $f_2(t)$ их значения и вводя обозначения

$$\int_0^T A_{11}(t)\,dt=P,\quad \int_0^T A_{12}(t)\,dt=Q,\quad \int_0^T A_{22}(t)\,dt=S,\tag{13,8}$$

находим

$$\begin{aligned}(\Omega_1-2ni\omega_1)\,[A_1P+B_1Q+2\sigma_1^{(1)}T)(-i\omega_1A_1+nB_1)]=\\=(\omega_1^2+\Omega_{11})\,[A_1Q+B_1S-2\sigma_1^{(1)}T\,(nA_1+i\omega_1B_1)].\end{aligned}\tag{14,8}$$

Подставим в (14,8) вместо B_1 его выражение через A_1

$$B_1=-\frac{(\Omega_{12}-2ni\omega_1)\,A_1}{\omega_1^2+\Omega_{22}},$$

затем в полученном выражении заменим произведение

$$(\omega_1^2+\Omega_{11})\,(\omega_1^2+\Omega_{22})\quad\text{через}\quad(\Omega_{12}+2ni\omega_1)\,(\Omega_{12}-2ni\omega_1).$$

После упрощений получим для $\sigma_1^{(1)}$ следующее выражение:

$$\lambda_1^{(1)}+i\gamma_1^{(1)}\equiv\sigma_1^{(1)}=\frac{P\,(\omega_1^2+\Omega_{22})+S\,(\omega_1^2+\Omega_{11})-2Q\Omega_{12}}{2i\omega_1T\,(\omega_1^2+\Omega_{11}+\omega_1^2+\Omega_{22}-4n^2)},\tag{15,8}$$

откуда

$$\lambda_1^{(1)}=0,\qquad \gamma_1^{(1)}=\frac{2Q\Omega_{12}-P\,(\omega_1^2+\Omega_{22})-S\,(\omega_1^2+\Omega_{11})}{2\omega_1T\,(\omega_1^2+\Omega_{11}+\omega_1^2+\Omega_{22}-4n^2)}.\tag{16,8}$$

Переходим теперь к определению $\sigma_1^{(2)}$. Совершая те же преобразования над системой $(2_2,8)$, получаем условие ортогональности, аналогичное (12,8):

$$(\omega_1^2+\Omega_{11})\int_0^T F_2(t)\,dt=(\Omega_{12}-2ni\omega_1)\int_0^T F_1(t)\,dt.\tag{17,8}$$

Подставляя в (17,8) вместо F_1 и F_2 их значения и вводя обозначения

$$\left.\begin{aligned}\int_0^T\vartheta_1\,dt=\alpha,\quad \int_0^T\vartheta_2\,dt=\beta,\\ \int_0^T A_{11}\vartheta_1\,dt=P_1,\quad \int_0^T A_{12}\vartheta_1\,dt=P_2,\quad \int_0^T A_{12}\vartheta_2\,dt=Q_1,\quad \int_0^T A_{22}\vartheta_2\,dt=Q_2,\end{aligned}\right\}\tag{18,8}$$

после ряда преобразований находим

$$\sigma_1^{(2)} = \frac{(\Omega_{12}+2ni\omega_1)(P_2+Q_2+2\omega_1\gamma_1^{(1)}\beta-2ni\gamma_1^{(1)}\alpha)}{2i\omega_1 T A_1 [4n^2-(\omega_1^2+\Omega_{11}+\omega_1^2+\Omega_{22})]} -$$
$$- \frac{(\omega_1^2+\Omega_{22})(P_1+Q_1+2\omega_1\gamma_1^{(1)}\alpha+2ni\gamma_1^{(1)}\beta)-A_1T\gamma_1^{(1)^2}(\omega_1^2+\Omega_{11}+\omega_1^2+\Omega_{22})}{2i\omega_1 T A_1 [4n^2-(\omega_1^2+\Omega_{11}+\omega_1^2+\Omega_{22})]}. \quad (19,8)$$

Входящие в формулу (19,8) коэффициенты P_1, P_2, Q_1, Q_2, α, β зависят от ϑ_1 и ϑ_2. Поэтому при определении $\sigma_1^{(2)}$ нельзя избежать вычисления ϑ_1 и ϑ_2, что довольно громоздко.

При вычислении ширины области неосуществимости мы ограничимся лишь первым приближением *, так как в случае солнечной системы значение параметра ε — массы Сатурна — чрезвычайно мало, именно

$$\varepsilon = 0.00028571.$$

Ввиду симметрии всех формул, нетрудно получить значение для $\sigma_2^{(1)}$, заменив в формуле (15,8) ω_1 на ω_2, т. е.

$$\sigma_2^{(1)} = \frac{P(\omega_2^2+\Omega_{22})+S(\omega_2^2+\Omega_{11})-2Q\Omega_{12}}{2i\omega_2 T(\omega_2^2+\Omega_{11}+\omega_2^2+\Omega_{22}-4n^2)}. \quad (20,8)$$

§ 9

Для вычисления ширины областей неосуществимости в конкретном случае солнечной системы надо вычислить интегралы

$$P = \int_0^T A_{11}(t)\,dt, \quad Q = \int_0^T A_{12}(t)\,dt, \quad S = \int_0^T A_{22}(t)\,dt. \quad (1,9)$$

После того как они будут вычислены, надо вычислить $\sigma_1^{(1)}$ и $\sigma_2^{(1)}$ по формулам (15,8); (20,8), затем Ω_1^0, Ω_2^0 по формулам (18',7); и; наконец, $\delta^{(k)}$ по формулам (22,7) или (21,7).

Все интегралы (1,9) могут быть выражены через коэффициенты Лапласа

$$L_k^{(n/2)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos k\tau\, d\tau}{[1+\alpha^2-2\alpha\cos\tau]^{n/2}}, \quad (2,9)$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$ и n — нечетное число. Между самими коэффициентами Лапласа существуют следующие соотношения [(5), Bd. I, S. 324—332)]:

$$\left.\begin{aligned} L_k^{(s+1)} &= \frac{(k+s)(1+\alpha^2)}{s(1-\alpha^2)^2}L_k^{(s)} - \frac{2(k-s+1)\alpha}{s(1-\alpha^2)^2}L_{k+1}^{(s)}, \\ L_{k+1}^{(s+1)} &= \frac{2(k+s)\alpha}{s(1-\alpha^2)^2}L_k^{(s)} - \frac{(k-s+1)(1+\alpha^2)}{s(1-\alpha^2)^2}L_{k+1}^{(s)}. \end{aligned}\right\} \quad (3,9)$$

При помощи формул (3,9) можно найти выражения для $L_k^{(s)}$ $\left(\text{с любыми значениями } k \text{ и } s = \frac{2j+1}{2}\right)$, исходя из значений для $L_0^{(1/2)}$ и $L_1^{(1/2)}$. Коэффициенты $L_0^{(1/2)}$ и $L_1^{(1/2)}$ выражаются через эллиптические интегралы следующим образом:

$$L_0^{(1/2)} = \frac{4}{\pi}F(\alpha), \quad L_1^{(1/2)} = \frac{4}{\pi\alpha}[F(\alpha)-E(\alpha)], \quad (4,9)$$

---

* Автором вычислено и второе приближение. Соответствующие формулы для ϑ_1 и ϑ_2 могут быть легко выведены, хотя и имеют громоздкий вид. Чтобы не увеличивать объема работы, они не приводятся здесь.

где

$$F(\alpha)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\tau}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\tau}}, \quad E(\alpha)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\tau}\,d\tau. \tag{5,9}$$

Для этих функций $F(\alpha)$, $E(\alpha)$, как известно, существуют готовые таблицы ([6]).

Выразим теперь P, Q, S через коэффициенты Лапласа. Авторон [([1]), § 3] были получены следующие формулы:

$$A_{11}(t)=\frac{\partial^2\left(\frac{1}{\rho_3}\right)}{\partial a^2}, \quad A_{12}(t)=\frac{\partial^2\left(\frac{1}{\rho_3}\right)}{\partial a\,\partial b}, \quad A_{22}(t)=\frac{\partial^2\left(\frac{1}{\rho_3}\right)}{\partial b^2}, \tag{6,9}$$

где

$$\rho_3=\sqrt{\left[a-R\cos\left((n_0-n)t+\varphi_0\right)\right]^2+\left[b-R\sin\left((n_0-n)t+\varphi_0\right)\right]^2}. \tag{7,9}$$

Из (6,9) и (7,9) определяем

$$\left.\begin{aligned} A_{11}(t)&=\frac{3\left[a-R\cos\left((n_0-n)t+\varphi_0\right)\right]^2}{\rho_3^5}-\frac{1}{\rho_3^3};\\ A_{12}(t)&=\frac{3\left[a-R\cos\left((n_0-n)t+\varphi_0\right)\right]\left[b-R\sin\left((n_0-n)t+\varphi_0\right)\right]}{\rho_3^5},\\ A_{22}(t)&=\frac{3\left[b-R\sin\left((n_0-n)t+\varphi_0\right)\right]^2}{\rho_3^5}-\frac{1}{\rho_3^3}. \end{aligned}\right\} \tag{8,9}$$

Вместо a и b введем новые величины l и γ_0, связанные с ними соотношениями

$$\left.\begin{aligned} a&=l\cos\gamma_0,\\ b&=l\sin\gamma_0; \end{aligned}\right\} \tag{9,9}$$

тогда

$$\rho_3=R\sqrt{1+\left(\frac{l}{R}\right)^2-2\frac{l}{R}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}-\varphi_0+\gamma_0\right)},$$

где $n-n_0$ заменено на $\frac{2\pi}{T}$.

Для упрощения все дальнейшие вычисления будем вести для случая $\varphi_0=\gamma_0$.

Рассмотрим интеграл

$$I=\int\limits_0^T\frac{\cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)dt}{\left[1+\left(\frac{l}{R}\right)^2-2\frac{l}{R}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right]^s};$$

полагая $\frac{2\pi t}{T}=\tau$, получим

$$I=\frac{T}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos k\tau\,d\tau}{\left[1+\left(\frac{l}{R}\right)^2-2\frac{l}{R}\cos\tau\right]^s}=$$

$$=\frac{T}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{\cos k\tau\,d\tau}{\left[1+\left(\frac{l}{R}\right)^2-2\frac{l}{R}\cos\tau\right]^s}=\frac{1}{2}TL_k^{(s)}\left(\frac{l}{R}\right). \tag{10,9}$$

Вследствие нечетности подинтегральной функции интеграл

$$\int\limits_0^T \frac{\sin\left(\frac{2\pi k}{T}\,t\right)dt}{\left[1+\left(\frac{l}{R}\right)^2-2\,\frac{l}{R}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right]^s}=0. \qquad (11.9)$$

Подставляя (8,9) в (1,9) и пользуясь соотношениями (9,9). (10,9) и (11,9), после преобразований получаем

$$\left.\begin{aligned} P&=\frac{T}{2}\left\{\frac{3\,(2a^2+R^2)}{2R^5}\,L_0^{(5/2)}-\frac{6a\cos\gamma_0}{R^4}\,L_1^{(5/2)}+\frac{3\,\mathrm{cc}}{2R^3}\,L_2^{(5/2)}-\frac{1}{R^3}\,L_0^{(3/2)}\right\}, \\ Q&=\frac{T}{2}\left\{\frac{3ab}{R^5}\,L_0^{(5/2)}-\frac{3l\sin 2\gamma_0}{R^4}\,L_1^{(5/2)}+\frac{\sin 2\gamma_0}{2R^3}\,L_2^{(5/2)}\right\}, \\ S&=\frac{T}{2}\left\{\frac{3\,(2b^2+R^2)}{2R^5}\,L_0^{(5/2)}-\frac{6b\sin\gamma_0}{R^4}\,L_1^{(5/2)}-\frac{3\cos 2\gamma_0}{2R^3}\,L_2^{(5/2)}-\frac{1}{R^3}\,L_0^{(3/2)}\right\}. \end{aligned}\right\} \qquad (12.9)$$

Численные расчеты областей неосуществимости для солнечной системы и сравнение их с наблюдениями мы дадим в § 12.

§ 10

В случае круговых орбит астероидов нас интересует их осуществимость в отношении радиуса орбиты.

В задаче о круговых орбитах характеристическое уравнение также будет возвратным уравнением четвертой степени [(1), § 2].

Разложения коэффициентов характеристического уравнения имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} B_1(\mu)&=-(1+\cos nT)+a_1\mu+a_2\mu^2+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\mu^k, \\ B_2(\mu)&=(1+\cos nT)+b_1\mu+b_2\mu^2+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}b_k\mu^k. \end{aligned}\right\} \qquad (1,10)$$

Далее,

$$\left.\begin{aligned} 2a_0^2-2-2b_0-2a_0\sqrt{a_0^2+2-2b_0}&=0, \\ 2a_0^2-2-2b_0+2a_0\sqrt{a_0^2+2-2b_0}&=-4\sin^2 nT. \end{aligned}\right\} \qquad (2,10)$$

Пользуясь формулами (2,7) и (2,10), составляем первые члены разложения корня $\rho_2(\mu)$:

$$\rho_2(\mu)=e^{inT}\left[1+\frac{2a_1\cos nT+b_1}{2i\sin nT\,(1-\cos nT)}\,\mu+\ldots\right] \qquad (3,10)$$

По формуле $\sigma=\frac{1}{T}\log\rho$ находим

$$\sigma_2(\mu)=in+\frac{2a_1\cos nT+b_1}{2i\sin nT\,(1-\cos nT)}\,\mu+\ldots \qquad (4,10)$$

Из (2,10) видно, что

$$2a_0^2-2-2b_0-2a_0\sqrt{a_0^2+2-2b_0}=0,$$

поэтому в силу (2,7) разложение корня $\rho_1(\mu)$ будет иметь вид:

$$\rho_1(\mu)=1+i\sqrt{\frac{2a_1+b_1}{1-\cos nT}}\cdot\sqrt{\mu}-\frac{2a_1+b_1}{2\,(1-\cos nT)}\cdot\mu+\ldots. \qquad (5,10)$$

откуда

$$\sigma_1(\mu)=\frac{1}{T}\left\{i\sqrt{\frac{2a_1+b_1}{1-\cos nT}}\cdot\sqrt{\mu}-\frac{2a_1+b_1}{1-\cos nT}\cdot\mu+\ldots \right. \tag{6,10}$$

Сравнивая разложения (4,10) и (6,10) с разложениями

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1(\mu)&=\sqrt{\mu}\,\sigma_1^{(1/2)}+\mu\sigma_1^{(1)}+\ldots,\\ \sigma_2(\mu)&=in+\mu\sigma_2^{(1)}+\ldots,\end{aligned}\right\}$$

получаем значения для a_1 и b_1, выраженные через $\sigma_1^{(1/2)}$ и $\sigma_2^{(1)}$:

$$\left.\begin{aligned}a_1&=-\frac{1}{2}\left[T^2(\sigma_1^{(1/2)})^2+2i\sin nT\cdot\sigma_2^{(1)}\right],\\ b_1&=T(\sigma_1^{(1/2)})^2\cos nT+2i\sin nT\cdot\sigma_2^{(1)}.\end{aligned}\right\} \tag{7,10}$$

Переходим теперь к вычислению ширины областей неосуществимости. В случае солнечной системы среднее суточное движение Юпитера известно, именно $n_0=299''$; следовательно, n_0 фиксировано. Среднее суточное движение астероида n будем считать переменным параметром. Так как Юпитер по отношению к астероидам будет *внешней* планетой, то $n_0<n$, поэтому в формулах (7) [(1), § 6] числу k следует придавать лишь положительные значения.

Критические частоты определяются двумя сериями значений

$$\frac{n_0}{n}=\frac{k-1}{k},\quad \frac{n_0}{n}=\frac{2k-1}{2k+1},\qquad k=1,2,3,\ldots \tag{8,10}$$

Так как нас интересует осуществимость радиуса орбиты астероида, а вариация радиуса орбиты определяется величиной u, то, в силу (16) [(1), § 5] надо определить, при каких значениях μ появляется впервые вещественная часть у характеристического показателя in. Этому характеристическому показателю соответствует корень $\rho_2(\mu)$, определяемый формулой

$$\rho_2(\mu)=\alpha_2(\mu)+\sqrt{\alpha^2(\mu)-1}, \tag{9,10}$$

где

$$2\alpha_2(\mu)=-B_1(\mu)-\sqrt{B_1^2(\mu)+2-2B_2(\mu)}. \tag{10,10}$$

Ширина областей неосуществимости определяется уравнениями

$$B_1^2(\mu)+2-2B_2(\mu)=0 \tag{11,10}$$

и

$$|\alpha_2(\mu)|=1. \tag{12,10}$$

Определим области неосуществимости, соответствующие уравнению (11,10), иными словами, соответствующие частотам вида

$$\frac{n_0}{n}=\frac{k-1}{k}.$$

Составляем приближенно уравнение (11,10)

$$\begin{aligned}B_1^2(\mu)+2-2B_2(\mu)&\equiv a_0^2+2-2b_0+(2a_0a_1-2b_1)\mu+\ldots\equiv\\ &\equiv(1-\cos nT)^2-2\left[(1+\cos nT)\,a_1+b_1\right]\mu+\ldots=0.\end{aligned} \tag{13,10}$$

Подставляя вместо a_1 и b_1 их выражения через $\sigma_1^{(1/2)}$ и $\sigma_2^{(1)}$ из (7,10), получим

$$1-\cos nT+\mu\left[T^2(\sigma_1^{1/2})^2-2i\sin nT\cdot\sigma_2^{(1)}\right]=0. \tag{14,10}$$

Обозначим теперь через $n^{(k)}$ критическую частоту, определяемую первым уравнением (8,10) и соответствующую значению k, и положим

$$n=n^{(k)}+\delta^{(k)}.$$

Для определения ширины области неосуществимости $\delta^{(k)}$ имеем:

$$T=\frac{2\pi}{n-n_0}=\frac{2\pi}{n^{(k)}-n_0}\left(1-\frac{\delta^{(k)}}{n^{(k)}-n_0}+\ldots\right), \tag{15,10}$$

$$nT=2\pi k-\frac{2\pi(k-1)^2}{n_0}\delta^{(k)}+\ldots, \tag{16,10}$$

$$\left.\begin{aligned}\sin nT&=-\frac{2\pi(k-1)^2}{n_0}\delta^{(k)}+\ldots,\\ 1-\cos nT&=\frac{4\pi^2(k-1)^4}{n_0^2}(\delta^{(k)})^2+\ldots\end{aligned}\right\} \tag{17,10}$$

Подставляя (15,10), (16,10), (17,10) в уравнение (14,10) и решая полученное уравнение относительно $\delta^{(k)}$, находим

$$\left.\begin{aligned}\delta^{(k)}=-p\pm\sqrt{p^2-q},\quad p&=\frac{\mu n_0}{\pi(k-1)^2}\left[i\sigma_2^{(1)}-\frac{2\pi(k-1)(\sigma_1^{(1/2)})^2}{n_0^2}\right],\\ q&=\frac{2\mu(\sigma_1^{(1/2)})^2}{(k-1)^2}.\end{aligned}\right\} \tag{18,10}$$

Полагая $n=n^{(k)}+\delta^{(k)}$ и рассуждая аналогично, легко получить приближенные формулы для определения ширины $\delta^{(k)}$ области неосуществимости, соответствующие уравнению (12,10), т. е. частотам вида

$$\frac{n_0}{n}=\frac{2k-1}{2k+1},$$

§ 11

Для вычисления величин $\sigma_1^{(1/2)}$ и $\sigma_2^{(1)}$ ищем решение [(1), § 5, формула (15)] системы

$$\left.\begin{aligned}\ddot{\tilde u}-2n^{1/3}\dot{\tilde\varphi}-(3n^2+\mu A_{11})\tilde u-\mu A_{12}\tilde\varphi&=0,\\ \ddot{\tilde\varphi}+2n^{5/3}\dot{\tilde u}-\mu n^{4/3}A_{12}\tilde u-\mu n^{4/3}A_{22}\tilde\varphi&=0,\end{aligned}\right\} \tag{1,11}$$

соответствующее первому характеристическому показателю в виде

$$\left.\begin{aligned}\tilde u&=(0+\sqrt{\mu}\vartheta_1+\mu\theta_1+\ldots)\,e^{(0+\sqrt{\mu}\sigma_1^{(1/2)}+\mu\sigma_1^{(1)}+\ldots)t},\\ \tilde\varphi&=(1+\sqrt{\mu}\vartheta_2+\mu\theta_2+\ldots)\,e^{(0+\sqrt{\mu}\sigma_1^{(1/2)}+\mu\sigma_1^{(1)}+\ldots)t}\end{aligned}\right\} \tag{2,11}$$

и решение, соответствующее второму характеристическому показателю в виде

$$\left.\begin{aligned}\tilde u&=(1+\mu v_1+\mu^2 w_1+\ldots)\,e^{(in+\mu\sigma_2^{(1)}+\mu^2\sigma_2^{(2)}+\ldots)t},\\ \tilde\varphi&=(2in^{2/3}+\mu v_2+\mu^2 w_2+\ldots)\,e^{(in+\mu\sigma_2^{(1)}+\mu^2\sigma_2^{(2)}+\ldots)t}.\end{aligned}\right\} \tag{3,11}$$

Рассуждая так же, как в § 8, легко убедиться, что в решениях уравнений каждого приближения можно выбрать произвольные постоянные интегрирования и соответствующие величины $\sigma_j^{(k)}$ так, чтобы функции каждого приближения $\vartheta_1, \vartheta_2, \theta_1, \theta_2, \ldots$ и $v_1, v_2, w_1, w_2, \ldots$ оказались периодическими.

Не проделывая здесь всех промежуточных вычислений, приводим окончательные формулы:

$$(\sigma_1^{(1/2)})^2 = -\frac{3}{T} n^{4/3} \int_0^T A_{22}(t)\,dt, \tag{4.11}$$

$$\sigma_2^{(1)} = -\frac{1}{2T}\left[n^{-1}\int_0^T A_{11}(t)\,dt + 4n^{1/3}\int_0^T A_{22}(t)\,dt\right]. \tag{5,11}$$

Интегралы

$$P = \int_0^T A_{11}(t)\,dt, \quad S = \int_0^T A_{22}(t)\,dt$$

так же, как и в § 9, могут быть выражены через коэффициенты Лапласа:

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{T}{2}\left\{-L_0^{(3/2)} + \left(3R^2 + \frac{3}{2}\right)L_0^{(5/2)} - 6RL_1^{(5/2)} + \frac{3}{2}L_2^{(5/2)}\right\}, \\ S &= \frac{T}{2}\left\{-RL_1^{(3/2)} + \frac{3}{2}R^2 L_0^{5/2} - \frac{3}{2}R^2 L_2^{5/2}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{6,11}$$

§ 12

В предыдущей работе (¹) было указано, что области неустойчивости вблизи круговых орбит были найдены в 1915 г. Цейпелем. Метод Цейпеля во много раз сложнее метода, примененного автором. Так как Цейпель не пользовался понятием осуществимости движения, то за исходную орбиту он не мог брать круговую. Сначала, пользуясь методом Пуанкаре, разыскивалось приближенно возмущенное Юпитером периодическое движение, близкое к круговому. Малым параметром, по степеням которого строились разложения, служила масса Юпитера μ. Затем исследовалась устойчивость по Ляпунову найденного возмущенного периодического движения. Те значения n вблизи $n^{(k)}$, при которых появлялись вещественные части у характеристических показателей, позволяли определить ширину областей неустойчивости.

Весьма простой по идее и теоретически совершенно верный метод Цейпеля в одном пункте вызывает сомнение. На основании теоремы Пуанкаре можно утверждать, что радиус сходимости рядов Пуанкаре, расположенных по параметру μ и определяющих периодическое движение, отличен от нуля. Однако этот радиус сходимости заранее не известен. Никакой оценки радиуса сходимости снизу Цейпель в своей работе не дает *. Поэтому неизвестно, можно ли пользоваться рядами Пуанкаре

* Подобная оценка была бы очень грубой и с практической точки зрения вряд ли дала бы хороший результат.

при значении $\mu = \frac{1}{1047}$. И действительно, вычисленные в первом приближении Цейпелем полосы неустойчивости вместе с номером k не убывают, а растут. Отсюда, конечно, не вытекает, что результат неверен, однако он вызывает большие сомнения.

Ряды, которыми автор пользуется для вычисления ширины областей неосуществимости, сходятся *при всех* μ. При стремлении μ к нулю ширина области неосуществимости около каждой критической частоты также стремится к нулю. Так как спектр критических частот имеет точку сгущения $\frac{1}{1}$, то, вообще говоря, ширина областей неосуществимости должна стремиться к нулю вместе с номером k, что и видно из приближенной формулы (18,10) *

Работа Клёзе, опубликованная в 1923 г., содержит обработку экспериментального материала. В нее вошли все малые планеты, известные к тому времени. Однако с тех пор было открыто около 600 новых астероидов; кроме того, за это время произошли некоторые изменения в оскулирующих элементах, наконец, элементы многих астероидов были значительно улучшены. Поэтому мне показалось интересным заново обработать весь имеющийся к данному моменту экспериментальный материал. С этой целью орбиты всех известных к настоящему времени астероидов были распределены по среднему суточному движению, и было подсчитано число астероидов, приходящихся на каждый интервал шириной в 5″ и 10″. Построенная таким примитивным путем** экспериментальная кривая распределения астероидов изображена на фиг. 2 через интервал в 10″. На оси n изображены также критические частоты 2 : 1; 3 : 1, 3 : 2, 5 : 3,...

Ширина областей неосуществимости, вычисленная для $\mu = \frac{1}{1047}$, весьма маленькая; например; около критической частоты 2 : 1 область неосуществимости простирается от 595″.4 до 598″.7 (критическая частота равна 598.1″). Следует отметить, что общий вид кривой автора не очень сильно отличается от кривой, полученной Клёзе. Во введении к своей работе Клёзе писал:

«Цейпель таким путем получил следующие данные для люков:

n/n_0	3 : 1	5 : 3	7 : 5	9 : 7
ширина люка Δn по Цейпелю	2″.0	3″.0	4″.0	5″.1
действит. люки по таблицам Kleine Planeten, 1920 г.	17″	38″	(52″)	(96″)

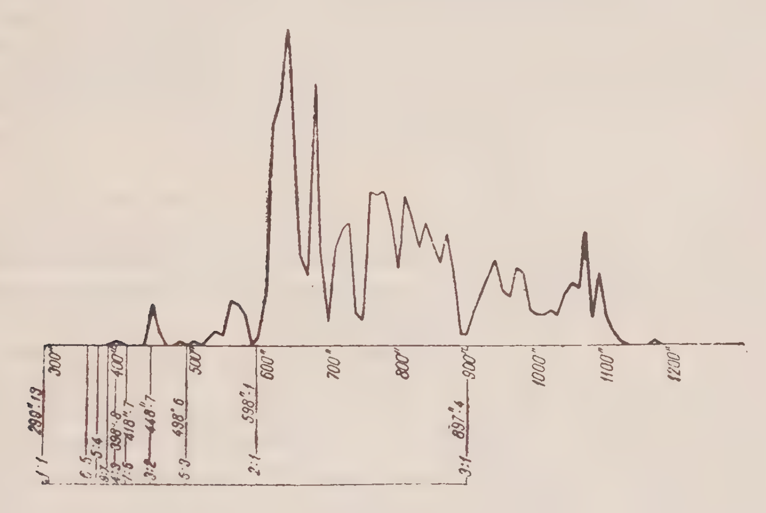
Как видно из этих данных, люки принципиально получены Цейпелем, но значения их слишком малы по сравнению с действительностью». Открытые с тех пор новые астероиды сильно сузили пустоты в кольце астерои-

* Следует все же здесь сделать оговорку, что эти соображения не являются вполне строгими, однако они легко могут быть обоснованы строго.

** Теоретический сектор Астрономического института Академии Наук по моей просьбе согласился подвергнуть более тщательной статистической обработке весь существующий материал об астероидах. Астрономический институт располагает возможностью обработать имеющийся материал на сортировочных перфорационных машинах.

дов. Как показывает кривая фиг. 2, порядок ширины люков теперь совпадает с теоретическим*. Более того, есть одна планета № 1362, 1935 QG_1 со средним суточным движением 596″.1, находящаяся совсем близко к критической частоте 2 : 1, и несколько планет вблизи критической частоты 3 : 2.

Это противоречие с теорией можно отнести за счет эксцентриситета и наклона орбит этих планет. В самом деле, все теоретические критические частоты и люки соответствуют *круговым* орбитам. Основываясь на непрерывной зависимости решения от параметров, можно утверждать, что при малом эксцентриситете и малом наклоне критические частоты и люки должны быть близки к соответствующим критическим частотам и люкам круговых орбит**. Следовательно, правильнее было бы сравнивать теоретические данные с данными наблюдений лишь для тех астероидов, эксцентриситеты и наклоны которых весьма малы. Почти все



Фиг. 2

* Следует впрочем отметить, что если люки в действительности и были бы шире, чем области неосуществимости, то это нисколько не противоречило бы теории. То, что астероидов нет там, где они могли бы быть, не противоречит теории и может быть объяснено их возникновением. (То, что астероидов нет между орбитой Земли и Венеры, не противоречит теории, хотя теория и не запрещает им быть там.) Важно лишь одно: астероидов не должно быть там, где теория запрещает им быть.

** Не исключена возможность, что при эксцентриситете $e \neq 0$ и наклоне $i \neq 0$ имеются еще другие критические частоты и люки, которые пропадают при $e = 0$, $i = 0$. Именно за счет подобных люков Клёзе объяснял наличие остальных минимумов в распределении астероидов. С математической точки зрения вычисления Клёзе пока не обоснованы.

только что перечисленные астероиды обладают сравнительно большими эксцентриситетами и наклонами *. Весьма вероятно, что у этих астероидов поправка к критической частоте за эксцентриситет достигает такого порядка, что эти астероиды окажутся лежащими вне люка.

В общем, если учесть, что самих объектов статистической обработки сравнительно мало, всего около 1500, то следует признать весьма хорошее совпадение теории с наблюдениями.

Следует особо остановиться на группе астероидов, известных под именем Троянцев. Средние суточные движения этих планет весьма близки к среднему суточному движению Юпитера, т. е. к критической частоте 1 : 1. Осуществимость больших полуосей орбит этих астероидов объясняется специальным значением начальной фазы. Троянцы образуют две группы; одна из групп лежит вблизи либрационной точки L_4, а другая вблизи либрационной точки L_5.

Точки же L_4 и L_5 являются *осуществимыми* по отношению к возмущениям Юпитера. Приведенное автором в § 10 исследование осуществимости точки L_4 (и L_5) по отношению к возмущениям Сатурна и соответствующие вычисления показывают, что при существующем соотношении между средним суточным движением Сатурна (120″) и точки L_4 (299″) масса Сатурна несколько мала для возникновения параметрического резонанса.

Исследование неосуществимости эллиптических орбит представляет чрезвычайно трудную задачу. Соответствующая линейная система уже не будет системой с периодическими коэффициентами; ее коэффициенты будут квазипериодическими функциями времени t. Следовательно, уже нельзя говорить о характеристических показателях — надо изучать характеристичные числа. Никаких эффективных методов для этого до сих пор не существует.

В заключение замечу, что я предполагаю в дальнейшем произвести более подробное сравнение теории с экспериментом. Поэтому выводы этого раздела следует рассматривать как предварительные.

Научно-исслед. институт
математики и механики Ленингр.
гос. университета

Поступило
24. V. 1941

* Планета № 1362 обладает эксцентриситетом $\varphi = 19°.8$ и наклоном $i = 24°.1$. Ближе всего к критической частоте 3 : 2 лежит планета Larissa № 1162: для нее $n = 448''.97$, $\varphi = 6°$, $i = 1°.9$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Артемьев Н. А., Исследование осуществимости периодических движений. Изв. Ак. наук СССР, серия матем., 5 (1941), 127—158.

[2] Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения. Москва. 1935.

[3] Гурса Э., Курс математического анализа, т. II, ГИЗ, 1923.

[4] Гурвиц А., Теория аналитических и эллиптических функций, Москва. 1933.

[5] Charlier L., Die Mechanik des Himmels, Leipzig, 1902, Bd. I.

[6] Самойлова-Яхонтова Н., Таблицы эллиптических интегралов, М.—Л., 1935

[7] Zeipel H. v., Sur la stabilité des solutions périodiques de la première sorte dans le problème des petites planètes, Arkiv for Mat., Astr. och Fysik, 10 (1915), H. 4.

[8] Klöse A. Über die Kommensurabilitätslücken im System der kleinen Planeten, Astr. Nachr., 218 (1923), № 5231—32.

N. ARTEMIEFF. UNE MÉTHODE POUR DÉTERMINER LES EXPOSANTS CARACTÉRISTIQUES ET SON APPLICATION À DEUX PROBLÈMES DE LA MÉCANIQUE CÉLESTE

RÉSUMÉ

Cet article est le prolongement d'un article précédent*. Dans ce dernier nous avons trouvé les rapports critiques des fréquences $\frac{n_0}{n}$ au voisinage desquelles le mouvement correspondant non perturbé peut être irréalisable (points de libration L_4 et L_5 ou bien orbite circulaire); nous avons trouvé ces rapports en étudiant seulement les équations linéaires de la première approximation. Nous avons montré que la possibilité ou bien l'impossibilité de réaliser le mouvement non perturbé dépend de ce que les exposants caractéristiques d'un certain système d'équations différentielles linéaires ont des parties réelles nulles ou bien non nulles. Il restait à calculer les exposants caractéristiques de certains systèmes linéaires dont les coefficients dépendent d'un paramètre ε.

Dans cet article je propose une méthode générale pour calculer les exposants caractéristiques d'un système d'équations linéaires dont les coefficients sont des fonctions holomorphes d'un paramètre ε.

Dans plusieurs cas (et, en particulier, dans les deux problèmes concrets que nous considérons) la méthode proposée est beaucoup plus facile à appliquer pratiquement que celle de Liapounoff ([2]). Dans le cas où les seconds membres du système linéaire dans la forme normale présentent des fonctions entières transcendantes du paramètre ε et d'ailleurs certaines

* Toutes les notations de l'article précédent sont conservées. Une partie de l'article, à savoir, les §§ 1—6 peuvent être lus sans que l'on connaisse l'article précédent, les autres supposent qu'il est connu.

conditions sont remplies, les formules proposées par l'auteur ainsi que les séries de Liapounoff sont valables dans tout le plan complexe des valeurs de ε et non seulement quand le paramètre ε est assez petit.

Les §§ 1—4 contiennent un exposé de cette méthode. Les §§ 5—6 donnent une illustration de l'application de cette méthode à l'étude de l'équation de Mathieu. Dans des § 7—9 la méthode s'applique à l'étude des domaines où le mouvement est irréalisable au voisinage des fréquences critiques dans le problème du mouvement des Troyens. Dans les § 10—11 la méthode est appliquée à l'étude du mouvement des astéroïdes. Dans le § 12 les résultats obtenus sont comparés avec les données expérimentales.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 8 (1944), 101—106 Série mathématique

И. Г. ПЕТРОВСКИЙ

О ДИФФУЗИИ ВОЛН И ЛАКУНАХ ДЛЯ СИСТЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (1) *

Статья представляет обзор исследований, сделанный на сессии физико-математического отделения Академии Наук СССР

Известно, что значение в точке $(t, x_1, \ldots, x_p)$ решения задачи Коши для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_p^2} \right) \tag{1}$$

при нечетном $p > 1$ зависит от начальных данных только на периферии основания характеристического конуса с вершиной в точке $(t, x_1, \ldots, x_p)$. При четном же p, а также при $p = 1$ $u(t, x_1, \ldots, x_p)$ зависит от начальных данных на всем основании этого конуса.

Допустим, что начальные значения u и $\frac{\partial u}{\partial t}$, которые мы будем считать заданными при $t = 0$, отличаются от нуля только внутри маленькой области G, около некоторой точки $(0, x_1^0, \ldots, x_p^0)$. Будем следить за значениями u в точках $(t, x_1, \ldots, x_p)$ при фиксированных как-нибудь значениях $x_1, \ldots, x_p$ и при увеличивающемся, начиная от нуля, t. При нечетном $p > 1$ величина $u(t, x_1, \ldots, x_p)$ может отличаться от нуля только на небольшом участке рассматриваемой в пространстве $(t, x_1, \ldots, x_p)$ прямой, параллельной оси t—именно на том, где расположены вершины характеристических конусов уравнения (1), периферии оснований которых пересекают область G. Если же p четное или $p = 1$, то u обязательно равно нулю только в тех точках этой прямой, где расположены вершины характеристических конусов, *основания* которых не содержат точек области G и которые, очевидно, образуют некоторый отрезок этой прямой, одним из концов которого служит точка $(0, x_1, \ldots, x_p)$. Во всех же других точках этой прямой $u(t, x_1, \ldots, x_p)$, вообще говоря, отлично от нуля.

Следовательно, возмущение, произведенное в начальный момент в некоторой малой окрестности точки $(x_1^0, \ldots, x_p^0)$ при нечетном $p > 1$ и $t > 0$ отзывается на значениях функции u только в тех точках пространства $(x_1, \ldots, x_p)$, которые лежат около сферы радиуса at с центром в точке $(x_1^0, \ldots, x_p^0)$. Таким образом, от возмущения, произведенного в началь-

* Цифры в скобках относятся к литературе, помещенной в конце статьи.

ный момент в точке $(x_1^0, \ldots, x_p^0)$, возникает сферическая волна с центром в этой точке, имеющая передний и задний фронт. При четном p и при $p=1$ возмущение, произведенное в начальный момент в окрестности $(x_1^0, \ldots, x_p^0)$, отзывается, вообще говоря, на всех точках, лежащих внутри сферы радиуса at с центром в $(x_1^0, \ldots, x_p^0)$. Возникает волна, имеющая резкий передний край и размытый задний. Говорят, что в этом случае происходит диффузия (размыв) заднего фронта волны; при нечетном $p>1$ диффузии не бывает.

Еще в начале текущего века Адамар (²) показал, что для линейных гиперболических уравнений 2-го порядка с переменными коэффициентами при четном p всегда имеет место диффузия волн. Вопрос о диффузии волн для общих линейных гиперболических уравнений при нечетном p долгое время оставался открытым. Только в 1939 г. появилась статья Mathisson'a (³) где доказывается следующее. При $p=3$ единственным классом линейных гиперболических уравнений второго порядка, у которых нет диффузии волн, будут уравнения, получающиеся из (1) в результате следующих трех операций:

1) умножения общих частей уравнения на некоторую функцию от $t, x_1, \ldots, x_p$,

2) линейной замены неизвестной функции,

3) перехода от независимых переменных $t, x_1, \ldots, x_p$ к новым независимым переменным.

Методы, которыми пользовался при этом Mathisson, принципиально применимы и к гиперболическим уравнениям 2-го порядка с любым нечетным $p>1$. Но при $p>3$ вычисления становятся более громоздкими и до конца не доведены.

Автор изучал аналогичные вопросы для общих гиперболических систем. Пусть дана линейная гиперболическая система с достаточно гладкими коэффициентами

$$\frac{\partial^{n_i}u_i}{\partial t^{n_i}} = \sum_{j,\,k} a_{ij}^{(k_0,\,k_1,\,\ldots,\,k_p)}(t, x_1, \ldots, x_p)\,\frac{\partial^{k_0+k_1+\ldots+k_p}u_j}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_p^{k_p}} \tag{2}$$

$$(k_0 < u_j, \qquad k_0+k_1+\ldots+k_p \leqslant n_j, \qquad i, j = 1, \ldots, N).$$

Боковая поверхность характеристического конуса с вершиной в точке $(t^*, x_1^*, \ldots, x_p^*)$ разбивает основание его на плоскости $t=t_0$, вообще говоря, на несколько областей. Одну из этих областей G_{t_0} будем называть л а к у н о й, если при любых изменениях начальных данных (лишь бы они оставались достаточно гладкими) только внутри G_{t_0} решение задачи Коши для уравнения (2) не изменяется в точке $(t^*, x_1^*, \ldots, x_q^*)$. Для определенности будем считать $t_0 < t^*$. Если t_0 достаточно близко к t^*, то каждой из областей $G_{t_0}^*$, на которые поверхность характеристического конуса с вершиной в точке $(t^*, x_1^*, \ldots, x_p^*)$, построенного для системы уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^{n_i}u_i}{\partial t^{n_i}} = \sum_{j,\,k} a_{ij}^{(k_0,\,k_1,\,\ldots,\,k_p)}(t^*, x_1^*, \ldots, x_p^*)\,\frac{\partial^{n_j}u_j}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_1^{k_p}} \tag{3}$$

$$(k_0 < n_j, \qquad k_0+k_1+\ldots+k_p = n_j, \qquad i, j = 1, \ldots, N),$$

разбивает его основание на плоскости $t=0$, будет соответствовать единственная область G_{t_0} близкая $G^*_{t_0}$, построенная для системы (2).

ТЕОРЕМА I. *Если при всех t_0, достаточно близких к t^*, область G_{t_0}, соответствующая области $G^*_{t_0}$, будет лакуной для системы* (2), *то область $G^*_{t_0}$ будет лакуной для системы* (3).

Очевидным следствием этой теоремы является приведенная выше теорема Адамара о диффузии волн для всех линейных гиперболических уравнений 2-го порядка с четным числом пространственных координат, так как для всех линейных гиперболических уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами, которые линейным преобразованием в пространстве $(t, x_1, \ldots, x_p)$ всегда приводятся к уравнению вида (1), всегда имеет место диффузия волн.

Все дальнейшее будет относиться к изучению лакун у линейных гиперболических систем типа (3) с постоянными коэффициентами. Необходимым и достаточным условием отсутствия диффузии волн у таких систем, очевидно, будет наличие лакуны, которую пересекает проходящая через вершину характеристического конуса прямая, параллельная оси t. Лакуны, не разрушающиеся при любых достаточно малых изменениях коэффициентов, назовем **устойчивыми**.

Будем рассматривать операции $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_k}$ как символичное умножение, а систему уравнений (3) как систему линейных алгебраических уравнений относительно $u_1, \ldots, u_N$. Составим детерминант из коэффициентов этой системы. В раскрытом виде его можно переписать так

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} + \sum_{(k)} a^{(k_0, k_1, \ldots, k_p)} \frac{\partial^n}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_p^{k_p}},$$

где суммирование распространяется по всем целым $k_1, \ldots, k_p$, сумма которых равна n, а $n = n_1 + \ldots + n_N$. Уравнение

$$1 + \sum_{(k)} a^{(k_0, k_1, \ldots, k_p)} z_1^{k_1} \ldots z_p^{k_p} = 0 \tag{4}$$

называется **характеристическим** для системы (3). Его можно рассматривать как тангенциальное уравнение поверхности, представляющей собою пересечение боковой поверхности характеристического конуса K с вершиной в точке $(t, 0, \ldots, 0)$, построенного для системы (3), с основанием $t_0 = 0$, если уравнения плоскостей в пространстве $(x_1, \ldots, x_p)$ написать в виде

$$-t + x_1 z_1 + \ldots + x_p z_p = 0. \tag{5}$$

По закону двойственности каждой точке $(x_1, \ldots, x_p)$ в этом пространстве будет соответствовать плоскость в пространстве $(z_1, \ldots, z_p)$. Чтобы решить вопрос о том, принадлежит ли какая-нибудь точка $(x_1, \ldots, x_p)$ устойчивой лакуне в основании конуса K, возьмем в плоскости (5) пространства $(z_1, \ldots, z_p)$ какую-нибудь точку A. Проведем из нее всевозмож-

ные прямые с действительными коэффициентами, лежащие в этой плоскости, и рассмотрим их точки пересечения с поверхностью (4). Действительные (равно как и комплексные) точки пересечения образуют некоторые $(p-2)$-мерные циклы, которые мы будем обозначать через C_{reel} и соответственно C_{imag}. Цикл C_{reel}, очевидно, не зависит от выбора точки A. Цикл C_{imag} заменяется ему гомологическим в комплексном пересечении (4) и (5) при изменении A.

Считая, что поверхность (4) не имеет особых точек, можно сформулировать следующие теоремы.

ТЕОРЕМА II. *Если все $n_i < p+1$, то необходимым и достаточным условием существования устойчивой лакуны у системы* (3) *является условие, чтобы соответствующие ее точкам циклы C_{reel} в случае нечетного p (соответственно, циклы C_{imag} в случае четного p) были гомологичны нулю в комплексном пересечении* (4) *и* (5).

Имеются примеры таких лакун.

Для решения вопроса о существовании лакун в том случае, когда некоторые $n_i \geqslant p+1$, надо построить циклы $C_{\text{reel}}(\tau)$ в случае нечетного p (соответственно циклы $C_{\text{imag}}(\tau)$ в случае четного p) для каждой из плоскостей

$$-\tau + x_1 z_1 + \ldots + x_p z_p = 0 \quad (0 \leqslant \tau \leqslant t). \tag{6}$$

Поверхность, образованную этими циклами, обозначим через S.

ТЕОРЕМА III. *Необходимым условием существования устойчивой лакуны у уравнения* (3) *в случае, когда некоторые $n_i \geqslant p+1$, является условие, чтобы соответствующие ее точкам циклы $C_{\text{reel}}(t)$ при нечетном p (соответственно циклы $C_{\text{imag}}(t)$ при четном p) были гомологичны нулю в комплексных пересечениях* (4) *и* (5).

Допустим, что это условие выполнено. Натянем пленки на циклы $C_{\text{reel}}(\tau)$ (соответственно $C_{\text{imag}}(\tau)$) в комплексных сечениях поверхности (4) с плоскостями (6) при $\tau = t$ и $\tau = 0$. Последнее всегда возможно в силу гиперболичности системы (3). Это легко доказать, заметив, что в силу гиперболичности действительная поверхность (4) состоит при четном n из $\frac{n}{2}$ овалов, последовательно вложенных друг в друга; при нечетном n к этим овалам присоединяется еще так называемый «непарный кусок», гомологичный в действительном проективном пространстве $(x_1, \ldots, x_p)$ плоскости. Указанное натяжение пленок на циклы $C_{\text{reel}}(\tau)$ или $C_{\text{imag}}(\tau)$ при $\tau = 0$ и $\tau = t$ можно делать по-разному.

Все циклы Σ, образованные при этом поверхностями S и такими пленками, гомологичны между собою в комплексной поверхности (4) при четном p, так как можно показать, что при четном p все $(p-1)$-мерные циклы у общей алгебраической поверхности $(p-2)$-го комплексного измерения P, являющейся комплексными пересечениями плоскости (6) при $\tau = 0$ или $\tau = t$ с поверхностью (4), гомологичны нулю в этих сечениях. Если же p нечетное, то при различных способах натягивания пленок могут получиться негомологичные между собою в комплексной поверхности (4) циклы Σ, так как у общей алгебраической поверхности P при нечетном p имеется один $(p-1)$-мерный

линейно независимый негомологичный нулю цикл, именно алгебраический цикл.

ТЕОРЕМА IV. *При выполнении условия теоремы* III *необходимым и достаточным условием существования устойчивой лакуны у системы* (3), *когда некоторые* $n \geqslant p+1$, *является условие, чтобы соответствующие ее точкам циклы* Σ *были гомологичны нулю в комплексной поверхности* (4) *при четном* p *или же были алгебраическими при нечетном* p.

Заметим, что при выполнении этого условия всегда можно так натянуть пленки на циклы $C_{\text{reel}}(\tau)$ при $\tau = 0$ и $\tau = t$, чтобы цикл Σ был гомологичен нулю в комплексной поверхности (4).

Среди уравнений имеющих большое значение в математической физике, кроме указанного волнового уравнения, имеются лакуны у системы уравнений упругости и у системы уравнений кристаллооптики в трехмерном пространстве. Каждая из этих систем состоит из уравнений 2-го порядка, а их действительные характеристические поверхности состоят из конечных овалов, последовательно вложенных друг в друга. Действительным плоскостям, пересекающим все эти овалы, соответствуют внешности характеристических конусов.

Как нами уже указано было несколько раньше, циклы $\overrightarrow{C_{\text{reel}}}$, соответствующие этим плоскостям, гомологичны нулю. Плоскостям же, совсем не пересекающим этих овалов, соответствуют лакуны, так как циклы C_{reel} получаются в этом случае пустыми. Вопреки предположению, сделанному в этой работе, что характеристические поверхности не имеют особых точек, здесь такие точки имеются. Поэтому об устойчивости лакун у системы уравнений упругости или у системы уравений кристаллооптики можно говорить только условно, допуская такие изменения этих систем, которые не нарушают их гиперболичности.

Институт математики при
Московском гос. университете

Поступило
26. XI. 1943

ЛИТЕРАТУРА

[1] Петровский И. Г., Докл. Акад. Наук СССР, XXXVIII (1943), No. 5—6, 163—165.
[2] Hadamard J., Le problème de Cauchy, Paris, 1932, p. 238—241.
[3] Mathisson M., Acta mathematica, 71 (1939), No. 3—4, 249—282.

I. PETROWSKY. SUR LA DIFFUSION DES ONDES ET LES LACUNES POUR LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS HYPERBOLIQUES

RÉSUMÉ

Cet article présente l'exposé d'une conférence faite par l'auteur dans une séance de la Section physico-mathématique de l'Académie des Sciences de l'URSS. La conférence avait pour objet un aperçu des problèmes concernant la liaison entre la solution du problème de Cauchy et les données initiales pour le cas des équations hyperboliques.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 8 (1944), 107—128 Série mathématique

В. М. ДУБРОВСКИЙ

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСТО РАЗРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ МЕТОДОМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

Автор строит общую теорию марковских случайных процессов (случайных процессов без последействия) с произвольным множеством состояний, подчиненных тому условию, что за ограниченный промежуток времени изменение состояния системы происходит (с вероятностью единица) конечное число раз.

В этой работе изучается процесс изменения некоторой системы $\mathfrak{N}$, обладающий следующим свойством: каждый ограниченный промежуток времени $t < s \leqslant \tau$, если в нем состояние системы не остается неизменным, распадается на конечное число интервалов $t_{i-1} < s \leqslant t_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n+1;\ t_0 = t,\ t_{n+1} = \tau)$, в каждом из которых состояние постоянно, но отлично от состояний в соседних интервалах; число моментов $t_1, t_2, \ldots, t_n$, при которых система претерпевает изменение, конечно, но может быть сколь угодно большим.

Относительно множества $\mathfrak{A}$ всех возможных состояний рассматриваемой системы предположим лишь, что определено семейство $\mathfrak{M}$ его подмножеств, причем это семейство содержит какие угодно разности и конечные или счетные суммы своих элементов, отдельные элементы $\mathfrak{A}$, все множество $\mathfrak{A}$ и пустое множество. Переменные, выражающие моменты времени, будем считать изменяющимися в интервале $(-T, T)$, где T — некоторое положительное число, которое можно рассматривать либо как постоянное, либо как переменное, могущее принимать сколь угодно большие значения.

Предположим, далее, что вероятность $p_1(t, x, \tau)$ того, что система $\mathfrak{N}$, находясь в момент t в состоянии x, изменит последнее до момента τ, и притом лишь один раз, определяется равенством

$$p_1(t, x, \tau) = p(t, x)(\tau - t) + \varepsilon(t, x, \tau)(\tau - t), \tag{1}$$

где функция $p(t, x)$ неотрицательна, не превосходит положительной константы $K = K(T)$, непрерывна по t и измерима по x относительно $\mathfrak{M}$, а функция $\varepsilon(t, x, \tau)$ не превосходит постоянной K и стремится к нулю, если одна из переменных t и τ стремится к другой; все эти предпо-

ложения относятся к любым t, τ и x, удовлетворяющим условиям $-T<t<\tau<T$, $x\subset\mathfrak{A}$. Считая функцию $p(t, x)$ данной, допустим, кроме того, что известна функция $P(t, x, \mathcal{E})$, выражающая условную вероятность того, что система, находящаяся в момент t в состоянии x и претерпевающая в этот момент изменение, попадет в результате последнего в какое-либо состояние из множества $\mathcal{E}$. Относительно этой функции, которая в соответствии с ее теоретико-вероятностным смыслом должна быть неотрицательной, вполне (абсолютно) аддитивной и удовлетворяющей условию $P(t, x, \mathfrak{A})=1$, мы предположим, что она определена для любого $\mathcal{E}$ из семейства $\mathfrak{M}$, а по отношению к переменным t и x обладает теми же свойствами, что и функция $p(t, x)$.

В последующем имеют важное значение абстрактные интегралы в смысле Lebesgue'a — Stieltjes'a (¹), которые определяются как и обыкновенные интегралы Lebesgue'a, с той лишь разницей, что роль измеримых множеств играют множества, принадлежащие семейству $\mathfrak{M}$, а вместо меры множества рассматривается соответствующее ему значение некоторой вполне аддитивной функции множества $\Phi(\mathcal{E})$, определенной на семействе $\mathfrak{M}$, причем функция, которая подвергается интегрированию, будет некоторой функцией $f(x)$ элемента x пространства $\mathfrak{A}$, измеримой относительно семейства $\mathfrak{M}$. Для обозначения такого интеграла, распространенного на множество $\mathcal{E}\subset\mathfrak{M}$, будем пользоваться символом

$$\int_{\mathcal{E}} f(x)\,\Phi(d\mathfrak{A}_x).$$

Однако для этой работы аналитический аппарат интегрирования в смысле Lebesgue'a — Stieltjes'a оказывается недостаточным, и нужно пользоваться еще более общим понятием интеграла, именно предложенным А. Н. Колмогоровым (²). Интеграл в смысле Колмогорова от функции множества $\varphi(\mathcal{E})$, определенной на $\mathfrak{M}$, распространенный на множество $\mathcal{E}\subset\mathfrak{M}$, для обозначения которого служит символ

$$\int_{\mathcal{E}} \varphi(d\mathcal{E}),$$

означает постоянное число A, обладающее следующим свойством: каково бы ни было положительное число ε, существует такое конечное или счетное подразделение множества $\mathcal{E}$ на взаимно не налегающие части $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots$, принадлежащие $\mathfrak{M}$, что имеет место неравенство

$$\left|\sum_k \varphi(\mathcal{E}_k)-A\right|<\varepsilon,$$

причем это неравенство справедливо также для любой другой аналогичной суммы $\sum\limits_k \varphi(\mathcal{E}'_k)$, где каждое из множеств $\mathcal{E}'_k$ составляет часть одного из множеств, соответствующих первой сумме. Обозначим через $F(t, x, \tau, \mathcal{E})$ вероятность того, что рассматриваемая система, находясь в момент t в состоянии x, в момент τ окажется в одном из состояний,

принадлежащих множеству $\mathscr{E}$. Автором было доказано ([3]), что функция $F(t, x, \tau, \mathscr{E})$ удовлетворяет интегро-дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial F(t, x, \tau, \mathscr{E})}{\partial \tau} =$$

$$= -\int_{\mathscr{E}} F(t, x, \tau, d\mathfrak{A}_y)\, p(\tau, y) + \int_{\mathfrak{A}} F(t, x, \tau, d\mathfrak{A}_y)\, p(\tau, y)\, P(\tau, y, \mathscr{E}) \tag{2}$$

и

$$\frac{\partial F(t, x, \tau, \mathscr{E})}{\partial t} = p(t, x)\left[F(t, x, \tau, \mathscr{E}) - \int_{\mathfrak{A}} P(t, x, d\mathfrak{A}_y)\, F(t, y, \tau, \mathscr{E})\right], \tag{2'}$$

а также, что эти уравнения имеют единственное ограниченное решение, удовлетворяющее требуемым предельным условиям. Последние результаты представляют собою обобщение теории Feller'а на случай, соответствующий определениям и постановкам проблем в работе А. Н. Колмогорова ([4]); теория Feller'а, как известно, справедлива лишь для случая, когда $\mathfrak{A}$ — множество вещественных чисел, а $\mathfrak{M}$ — семейство измеримых в смысле Lebesgue'а линейных множеств ([5]).

Настоящая работа посвящена дальнейшему обобщению теории чисто разрывных случайных процессов Feller'а; основана она также на методе интегро-дифференциальных уравнений.

Пусть каждому моменту времени t из интервала $|t| < T$ по определенному закону приведено в соответствие множество $e(t)$, содержащееся в $\mathfrak{M}$. Обозначим через $e(t, \tau)$ общую часть множеств $e(s)$, соответствующих всем s из интервала $t < s < \tau$, и предположим, что $e(t, \tau) \subset \mathfrak{M}$ для любой пары t и τ, удовлетворяющей условию $-T < t < \tau < T$. Будем искать неотрицательную, измеримую по x и вполне аддитивную относительно $\mathscr{E}$ функцию $\omega(t, x, \tau, \mathscr{E})$, выражающую вероятность факта, состоящего в том, что рассматриваемая система, находясь в момент t в состоянии x, в момент τ окажется в каком-либо состоянии из множества $\mathscr{E}$, причем в любой промежуточный момент s интервала $t < s < \tau$ будет принадлежать соответствующему множеству $e(s)$. Докажем, что функция $\omega(t, x, \tau, \mathscr{E})$ удовлетворяет интегро-дифференциальным уравнениям, аналогичным уравнениям (2) и (2′), и может быть определена с их помощью во всех случаях (т. е. при условиях: $-T < t < \tau < T$, $x \subset \mathfrak{A}$, $\mathscr{E} \subset \mathfrak{M}$) путем сведения к однозначно разрешимым интегральным уравнениям. В дальнейшем последние условия мы всегда будем предполагать выполняющимися.

Подобно тому, как для функции $F(t, x, \tau, \mathscr{E})$ имеет место соотношение

$$F(t, x, \tau, \mathscr{E}) = \int_{\mathfrak{A}} F(t, x, s, d\mathfrak{A}_y)\, F(s, y, \tau, \mathscr{E}), \tag{3}$$

функция $\omega(t, x, \tau, \mathscr{E})$ удовлетворяет уравнению

$$\omega(t, x, \tau, \mathscr{E}) = \int_{e(s)} \omega(t, x, s, d\mathfrak{A}_y)\, \omega(s, y, \tau, \mathscr{E}), \tag{3'}$$

которое является непосредственным следствием ее теоретико-вероятностного смысла. Равенство (3′) послужит нам основой вывода уравнений для функции $\omega(t, x, \tau, \mathcal{E})$, аналогичных уравнениям (2) и (2′), подобно тому как равенство (3) лежит в основе самих уравнений (2) и (2′).

Наряду с функциями $F(t, x, \tau, \mathcal{E})$ и $\omega(t, x, \tau, \mathcal{E})$ будем рассматривать разность

$$\eta(t, x, \tau, \mathcal{E}) = F(t, x, \tau, \mathcal{E}) - \omega(t, x, \tau, \mathcal{E}),$$

которая, очевидно, выражает вероятность факта, состоящего в том, что система $\mathfrak{N}$, находясь в момент t в состоянии x, попадет в момент τ в какое-либо состояние из множества $\mathcal{E}$, причем по меньшей мере в один промежуточный момент s из интервала $t < s < \tau$ окажется в состоянии, не принадлежащем соответствующему множеству $e(s)$.

Задача об определении функции $\eta(t, x, \tau, \mathcal{E})$ автором ставилась и решена при помощи метода, отличного от метода интегро-дифференциальных уравнений, но лишь для случая $\mathcal{E} = \mathfrak{A}$ и при условиях относительно операции $e(t)$ более ограничительных, чем в настоящей работе [6].

Отметим, наконец, некоторые теоремы о предельном переходе под знаком абстрактного интеграла Lebesgue'a — Stieltjes'a, которые имеют весьма существенное значение в последующем.

I. Пусть функции $f_1, f_2, \ldots$ элемента x, содержащегося в $\mathfrak{A}$, измеримы и ограничены в их совокупности; $f_n(x) \to f(x)$, при неограниченном возрастании n для любого x; функция множества $\Phi(\mathcal{E})$ вполне аддитивна; $\mathcal{E} \subset \mathfrak{M}$; тогда при $n \to \infty$

$$\int_{\mathcal{E}} f_n(x)\,\Phi(d\mathfrak{A}_x) \to \int_{\mathcal{E}} f(x)\,\Phi(d\mathfrak{A}_x).$$

II. Пусть последовательность вполне аддитивных функций $\Phi_1(\mathcal{E})$, $\Phi_2(\mathcal{E}), \ldots$, вариации которых ограничены в их совокупности, для любого $\mathcal{E} \subset \mathfrak{M}$ имеет пределом соответствующее этому $\mathcal{E}$ значение вполне аддитивной функции $\Phi(\mathcal{E})$; пусть, затем, функция $f(x)$ элемента x множества $\mathfrak{A}$ измерима и ограничена; тогда

$$\int_{\mathcal{E}} f(x)\,\Phi_n(d\mathfrak{A}_x) \to \int_{\mathcal{E}} f(x)\,\Phi(d\mathfrak{A}_x),$$

где $\mathcal{E} \subset \mathfrak{M}$, $n \to \infty$.

III. Пусть $f_1, f_2, \ldots$ — последовательность измеримых и ограниченных в их совокупности функций элемента $x \subset \mathfrak{A}$, имеющая пределом $f(x)$ для любого x; пусть, кроме того, $\Phi_1(\mathcal{E})$, $\Phi_2(\mathcal{E}), \ldots$ — последовательность неотрицательных, ограниченных в их совокупности, вполне аддитивных функций, имеющая пределом $\Phi(\mathcal{E})$ для любого $\mathcal{E} \subset \mathfrak{M}$, где $\Phi(\mathcal{E})$ также вполне аддитивная функция; тогда, если $n \to \infty$, то

$$\int_{\mathcal{E}} f_n(x)\,\Phi_n(d\mathfrak{A}_x) \to \int_{\mathcal{E}} f(x)\,\Phi(d\mathfrak{A}_x).$$

Первая из этих теорем доказывается так же, как и в простейшем случае, когда $\mathfrak{M}$ — семейство измеримых в смысле Lebesgue'а множеств. Вторая легко доказывается путем замены интегралов соответствующими допредельными суммами. Чтобы доказать третью, достаточно обнаружить, что она верна для частного случая, когда $f(x) \equiv 0$, что нетрудно сделать так же, как и в случае теоремы I, после чего к общему случаю можно перейти при помощи теоремы II.

§ 1

Предположим, что рассматриваемая система в момент t находится в состоянии x; обозначим через $p_0(t, x, \tau)$ вероятность того, что в интервале времени $t \leqslant s < \tau$ изменения состояния не произойдет, и через $p_2(t, x, \tau)$ — вероятность того, что в этом интервале будут по меньшей мере два изменения состояния: тогда, очевидно, справедливы равенство

$$p_0(t, x, \tau) + p_1(t, x, \tau) + p_2(t, x, \pi) = 1 \tag{4}$$

и оценка

$$p_2(t, x, \tau) \leqslant (2K)^2 (\tau - t)^2 + (2K)^3 (\tau - t)^3 + \ldots \tag{5}$$

С другой стороны, легко видеть также, что имеет место тождество

$$p_0(t, x, \tau) = p_0(t, x, \tau + \Delta\tau) + p_0(t, x, \tau)[1 - p_0(\tau, x, \tau + \Delta\tau)],$$

откуда с помощью соотношений (1), (4) и (5) нетрудно убедиться, что функция $p_0(t, x, \tau)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial p_0(t, x, \tau)}{\partial \tau} = -p(\tau, x)\, p_0(t, x, \tau)$$

и, следовательно, определяется равенством

$$p_0(t, x, \tau) = e^{-\int\limits_t^\tau p(s, x)\, ds}. \tag{6}$$

Теперь, преобразуя (4) с помощью (1) и (6), легко доказать, что величина $\varepsilon(t, x, \tau)$ в формуле (1) стремится к нулю вместе с разностью $\tau - t$ равномерно относительно t и τ в области $-T < t < \tau < T$.

Обозначим через $F_k(t, x, \tau, \mathscr{E})$ вероятность того, что система $\mathfrak{N}$, находясь в момент t в состоянии x, в момент τ будет пребывать в состоянии, принадлежащем множеству $\mathscr{E}$, совершив за время $t \leqslant s < \tau$ ровно k изменений состояния ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Положим, далее, $E(x, \mathscr{E}) = 1$, если $x \subset \mathscr{E}$ и $E(x, \mathscr{E}) = 0$, если $x \not\subset \mathscr{E}$. Очевидно, что

$$F(t, x, \tau, \mathscr{E}) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(t, x, \tau, \mathscr{E}). \tag{7}$$

С другой стороны, нетрудно убедиться в справедливости равенств

$$F_0(t, x, \tau, \mathscr{E}) = p_0(t, x, \tau)\, E(x, \mathscr{E}), \tag{8}$$

$$F_1(t,x,\tau,\mathcal{E})=\int_t^\tau ds\int_{\mathcal{E}} p_0(t,\ x,\ s)\,p(s,\ x)\,P(s,\ x,\ d\mathfrak{A}_y)\,p_0(s,\ y,\ \tau) \quad (8')$$

$$F_k(t,x,\tau,\mathcal{E})=\int_t ds\int_{\mathfrak{A}} p_0(t,x,s)\,p(s,x)\,P(s,x,d\mathfrak{A}_y)\,F_{k-1}(s,y,\tau,\mathcal{E}) \quad (8'')$$

$$(k=1,\ 2,\ldots),$$

непосредственно основываясь на подсчете вероятностей всех несовместных между собой частных случаев соответствующих событий. Применяя метод индукции, легко видеть, что имеет место оценка

$$F_k(t,\ x,\ \tau,\ \mathcal{E})\leqslant\frac{(\tau-t)^k}{k!}(K)^k \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \qquad (9)$$

откуда вытекает, что ряд (7) сходится равномерно относительно t, x, τ и $\mathcal{E}$. Все функции F_k, как показывают равенства (6), (8), (8′) и (8″), неотрицательны, непрерывны по t и τ, измеримы по x и вполне аддитивны относительно $\mathcal{E}$. То же, следовательно, можно сказать и о функции F. Отметим, наконец, что из равенств (6), (7) и (8′) и оценки (9) вытекает:

$$\sum_{k=1}^{\infty} F_k(t,\ x,\ \tau,\ \mathcal{E})\leqslant(\tau-t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2T)^{k-1}}{k!}(K)^k=(\tau-t)\,K_1, \qquad (9')$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} F_k(t,\ x,\ \tau,\ \mathcal{E})\leqslant(\tau-t)^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(2T)^{k-2}}{k!}(K)^k=(\tau-t)^2\,K_2; \qquad (9'')$$

если переменные t и τ, оставаясь в области $-T<t<\tau<T$, стремятся к s, где s — постоянное число, меньшее T по абсолютной величине, то

$$\lim\frac{F_1(t,\ x,\ \tau,\ \mathcal{E})}{\tau-t}=\lim\frac{F(t,x,\tau,\mathcal{E})-F_0(t,x,\tau,\mathcal{E})}{\tau-t}=p(s,x)\,P(s,x,\mathcal{E}). \quad (9''')$$

Положим

$$F(t,x,\tau,\mathcal{E})=[1-p(t,x)(\tau-t)]\,E(x,\mathcal{E})+p(t,x)\,P(t,x,\mathcal{E})(\tau-t)+$$
$$+o(t,\ x,\ \tau,\ \mathcal{E}) \qquad (10)$$

и выясним некоторые свойства члена $o(t,\ x,\ \tau,\ \mathcal{E})$. Прежде всего, он представляет собой функцию, измеримую по x и вполне аддитивную относительно $\mathcal{E}$. Сопоставляя затем равенства (7) и (10), будем иметь

$$o(t,\ x,\ \tau,\ \mathcal{E})=F_0(t,\ x,\ \tau,\ \mathcal{E})-[1-p(t,\ x)(\tau-t)]\,E(x,\ \mathcal{E})+$$
$$+F_1(t,\ x,\ \tau,\ \mathcal{E})-p(t,\ x)\,P(t,\ x,\mathcal{E})(\tau-t)+\sum_{k=2}^{\infty} F_k(t,\ x,\ \tau,\ \mathcal{E}),$$

откуда, преобразуя $F_0(t,\ x,\ \tau,\ \mathcal{E})$ по формулам (8) и (6) и замечая, что $F_1(t,\ x,\ \tau,\ \mathcal{E})=p_1(t,\ x,\ \tau)\,P(t',\ x,\ \mathcal{E})$, где t' — некоторая точка интервала $t\leqslant s\leqslant\tau$, а $p_1(t,\ x,\ \tau)$ определяется равенством (1), получим

$$o(t, x, \tau, \mathcal{E}) = E(x, \mathcal{E}) \int_t^\tau [p(t, x) - p(s, x)]\, ds +$$

$$+ E(x, \mathcal{E}) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left[\int_t^\tau p(s, x)\, ds \right]^k + p(t, x)(\tau - t)[P(t', x, \mathcal{E}) -$$

$$- P(t, x, \mathcal{E})] + \varepsilon(t, x, \tau) P(t', x, \mathcal{E})(\tau - t) + \sum_{k=2}^{\infty} F_k(t, x, \tau, \mathcal{E}). \quad (10')$$

Из этого выражения для $o(t, x, \tau, \mathcal{E})$ вытекает, что отношение

$$\frac{o(t, x, \tau, \mathcal{E})}{\tau - t}$$

равномерно ограничено и стремится к нулю вместе с разностью $\tau - t$, причем свойство равномерной ограниченности этого отношения сохраняется, если в нем заменить функцию $o(t, x, \tau, \mathcal{E})$ ее вариацией относительно $\mathcal{E}$ на множестве $\mathfrak{A}$.

В силу определения функции $\eta(t, x, \tau, \mathcal{E})$ и равенства (10) имеет место следующее, играющее основную роль в последующем, соотношение

$$\omega(t, x, \tau, \mathcal{E}) = [1 - p(t, x)(\tau - t)] E(x, \mathcal{E}) +$$
$$+ p(t, x) P(t, x, \mathcal{E})(\tau - t) + o(t, x, \tau, \mathcal{E}) - \eta(t, x, \tau, \mathcal{E}). \quad (11)$$

Преобразуем второй множитель под знаком интеграла в равенстве (3) с помощью формулы (10). Тогда интеграл в правой части равенства (3) распадается на слагаемые, из которых одно будет представлять собой $F(t, x, s, \mathcal{E})$. Перенося это слагаемое в левую часть равенства, деля последнее почленно на разность $\tau - s$ и заставляя ее стремиться к нулю, легко видеть, принимая во внимание непрерывность функции $F(t, x, \tau, \mathcal{E})$ по τ и свойства члена $o(t, x, \tau, \mathcal{E})$, что функция $F(t, x, \tau, \mathcal{E})$ действительно удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению (2). Преобразуем затем первый множитель под знаком интеграла в равенстве (3) с помощью формулы (10). Тогда в правой части будем иметь слагаемое $F(s, x, \tau, \mathcal{E})$. Перенося его в левую часть равенства, деля последнее почленно на разность $s - t$ и заставляя ее стремиться к нулю, получим, как нетрудно убедиться, основываясь на непрерывности функции $F(t, x, \tau, \mathcal{E})$ по t и равенстве (10′), также интегро-дифференциальное уравнение (2′).

Из уравнений (2) и (2′) следует существование вполне аддитивной функции $\overline{F}(x, \mathcal{E})$, не зависящей от t и τ, которая для всевозможных t, x, τ и $\mathcal{E}$ удовлетворяет условию

$$F(t, x, \tau, \mathcal{E}) \leqslant \overline{F}(x, \mathcal{E}) \leqslant 1 + 4KT + 16K^2T^2. \quad (12)$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно перейти от уравнений (2) и (2′) к соответствующим интегральным уравнениям; затем в правых частях последних изменить знак у отрицательных членов на обратный, переходя от равенств к неравенствам, и во всех интегралах по вещественной

числовой переменной переменить области интегрирования, взяв в качестве их интервал $(-T, T)$. Заменяя в правой части какого-либо из полученных неравенств функцию F правой частью другого неравенства, мы и получим искомую функцию $\overline{F}(x, \mathcal{E})$.

Рассмотрим множество $de(t)$ всех элементов $\mathfrak{A}$, каждый из которых принадлежит $e(s)$ для любого s из некоторого интервала времени $t < s \leqslant t'$; аналогично введем в рассмотрение множество $ge(t)$ элементов $\mathfrak{A}$, содержащихся в $e(s)$ для всех s из интервала $t' \leqslant s < t$, где t' в обоих случаях может зависеть от соответствующего элемента. Множества $de(t)$ и $ge(t)$, очевидно, могут быть определены следующим образом:

$$de(t) = \sum_{t'>t} e(t, t'), \quad ge(t) = \sum_{t'<t} e(t', t). \tag{13}$$

Эти суммы, как легко видеть, могут быть заменены суммами аналогичными, но счетными, — значит, множества $de(t)$ и $ge(t)$ измеримы, т. е. принадлежат семейству $\mathfrak{M}$.

Функции $E[x, e(t, \tau)]$, $E[x, de(t)]$ и $E[x, ge(t)]$, рассматриваемые как функции только от x, очевидно, измеримы по x относительно $\mathfrak{M}$. Первая из них, кроме того, измерима в смысле Lebesgue'а относительно каждой из переменных t и τ при любом фиксированном значении другой и при любом определенном $x \subset \mathfrak{A}$, так как в таком случае эта функция не может иметь больше одной точки разрыва. Аналогично, функции $E[x, de(t)]$ и $E[x, ge(t)]$ измеримы в смысле Lebesgue'а относительно t для каждого определенного $x \subset \mathfrak{A}$. Действительно, взяв убывающую и стремящуюся к нулю последовательность чисел $h_1, h_2, \ldots$, легко заметить, что эти функции будут, соответственно, предельными функциями для последовательностей $E[x, e(t, t+h_n)]$ и $E[x, e(t-h_n, t)]$ при неограниченном возрастании n. Что же касается функций этих последовательностей, то каждая из них, очевидно, может иметь лишь конечное число точек разрыва в интервале, где она определена и, следовательно, измерима. Таким же образом легко доказать, что функции $E[x, e(t)\,de(t)]$ и $E[x, e(t)\,ge(t)]$, измеримые по x относительно $\mathfrak{M}$ при определенном t, будут измеримы в смысле Lebesgue'а по t для каждого фиксированного $x \subset \mathfrak{A}$. Из этого вытекает, что рассматриваемые в дальнейшем интегралы, распространяемые на множества, которые зависят от параметра, выражающего время, представляют собой измеримые функции этого параметра.

Отметим теперь некоторые свойства функций $\omega(t, x, \tau, \mathcal{E})$ и $\eta(t, x, \tau, \mathcal{E})$.

I. Если $x \not\subset de(t)$, то $\omega(t, x, \tau, \mathcal{E}) = 0$. Действительно, в этом случае соответствующее событие может произойти лишь при условии изменения состояния в данный момент t, чему в силу равенства (1) соответствует вероятность, равная нулю.

II. Если $\mathcal{E} \subset \mathfrak{A} - ge(\tau)$, то $\omega(t, x, \tau, \mathcal{E}) = 0$. Действительно, в силу предположения о конечности числа изменений состояния в ограниченном промежутке времени состояние в момент τ должно быть постоян-

ным в некотором конечном интервале времени $\tau-h<s\leqslant\tau$, откуда, если факт, соответствующий вероятности $\omega(t, x, \tau, \mathcal{E})$, наступает, то состояние в момент τ должно принадлежать множествам $\mathcal{E}$ и $ge(\tau)$, что находится в противоречии с условием $\mathcal{E}\subset\mathfrak{A}-ge(\tau)$.

III. Если $x\not\subset e(s)$, где s — определенная точка интервала $t<s<\tau$, то $\omega(t, x, \tau, \mathcal{E})\leqslant(s-t)K_1$. В самом деле, в этом случае событие, вероятность которого $\omega(t, x, \tau, \mathcal{E})$, предполагает по меньшей мере одно изменение состояния до момента s, вследствие чего $\omega(t, x, \tau, \mathcal{E})$ не превосходит левой, а следовательно, и правой частей неравенства (9′), если положить в последнем $\tau=s$, $\mathcal{E}=e(s)$.

IV. Если $e(s, \tau)\mathcal{E}=0$, где s — некоторая определенная точка интервала $t\leqslant s<\tau$, то $\omega(t, x, \tau, \mathcal{E})\leqslant(\tau-s)K_1$. В самом деле, предполагая, что соответствующий факт наступил и что после момента s состояние было неизменно, мы приходим к противоречию с условием $e(s, \tau)\mathcal{E}=0$. Кроме того, на основании равенства (3′) и оценки (9′) легко убедиться в том, что доказываемое утверждение действительно верно.

V. Если $x\not\subset de(t)$, $h\to0+$, то $\omega(t+h, x, \tau, \mathcal{E})\to0$. Действительно, так как $x\not\subset de(t)$, то, очевидно, существует убывающая и стремящаяся к нулю последовательность чисел h_1, h_2, ..., обладающая тем свойством, что x не принадлежит ни одному из множеств $e(t+h_n)$, откуда, как легко видеть, $\omega(t+h, x, \tau, \mathcal{E})<K_1h_n$ при условии $0\leqslant h<h_n$.

VI. Если $\mathcal{E}\subset\mathfrak{A}-ge(\tau)$, $h\to0+$, то $\omega(t, x, \tau-h, \mathcal{E})\to0$. Действительно, для любого элемента y, содержащегося в $\mathcal{E}$, очевидно, существует последовательность чисел $h_1(y)$, $h_2(y)$, ..., убывающая, стремящаяся к нулю и обладающая тем свойством, что y не принадлежит ни одному из множеств $e[\tau-h_n(y)]$. Возьмем положительные числа ε и δ $(\delta<\varepsilon)$ и обозначим через $\mathcal{E}_\delta$ совокупность элементов y множества $\mathcal{E}$, для каждого из которых по меньшей мере при одном значении n выполняется условие $\delta\leqslant h_n(y)<\varepsilon$. Пусть, далее, h — положительное число, меньшее δ, тогда, $\omega(t, x, \tau-h, \mathcal{E}_\delta)<\varepsilon K_1$ и, значит

$$\omega(t, x, \tau-h, \mathcal{E})=\omega(t, x, \tau-h, \mathcal{E}_\delta)+\omega(t, x, \tau-h, \mathcal{E}-\mathcal{E}_\delta)<$$
$$<\varepsilon K_1+\bar{F}(x, \mathcal{E}-\mathcal{E}_\delta).$$

Но каждый элемент множества $\mathcal{E}$ попадает в $\mathcal{E}_\delta$, начиная с достаточно малого δ, и, значит, $\bar{F}(x, \mathcal{E}-\mathcal{E}_\delta)<\varepsilon$ (если δ достаточно мало), так как функция $\bar{F}$ вполне аддитивна и, следовательно, $\omega(t, x, \tau-h, \mathcal{E})<$ $<\varepsilon(K_1+1)$ при любом положительном h, меньшем некоторого δ.

Перейдем теперь к свойствам функции $\eta(t, x, \tau, \mathcal{E})$.

1°. Если $x\subset e(t, \tau)$, то

$$\eta(t, x, \tau, \mathcal{E})\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}F_k(t, x, \tau, \mathcal{E})\leqslant(\tau-t)K_1.$$

2°. Если $\mathcal{E}\subset e(t, \tau)$, то

$$\eta(t, x, \tau, \mathcal{E})\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}F_k(t, x, \tau, \mathcal{E})\leqslant(\tau-t)K_1.$$

3°. Если $x \subset e(t, \tau)$, $\mathscr{E} \subset e(t, \tau)$, то

$$\eta(t, x, \tau, \mathscr{E}) \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} F_k(t, x, \tau, \mathscr{E}) \leqslant (\tau - t)^2 K_2.$$

Эти свойства функции $\eta(t, x, \tau, \mathscr{E})$ непосредственно вытекают из ее теоретико-вероятностного смысла. Чтобы в них убедиться, достаточно заметить, что в первом и втором случаях соответствующее событие предполагает по меньшей мере одно изменение состояния за время $t \leqslant s \leqslant \tau$, а в третьем случае за это же время — по меньшей мере два изменения состояния.

Возвращаясь теперь к функции $\omega(t, x, \tau, \mathscr{E})$, отметим дополнительно некоторые ее свойства

VII. Если $\mathscr{E} \subset e(s)\, e(s, \tau)$, где s — некоторая точка интервала $t < s < \tau$, то

$$\omega(t, x, s, \mathscr{E}) \leqslant \omega(t, x, \tau, \mathscr{E}) + [(\tau - s) K_1 + (\tau - s)^2 K_2] \bar{F}(x, \mathscr{E}).$$

В самом деле, вероятность того, что наступит событие, вероятность которого обозначена через $\omega(t, x, s, \mathscr{E})$, и вместе с тем не наступит событие, соответствующее вероятности $\omega(t, x, \tau, \mathscr{E})$, выражается следующим образом:

$$\int_{\mathscr{E}} \omega(t, x, s, d\mathfrak{A}_y) [F(s, y, \tau, \mathfrak{A} - \mathscr{E}) + \eta(s, y, \tau, \mathscr{E})],$$

откуда, приняв во внимание оценку (9′) и третье свойство функции η, нетрудно убедиться, что доказываемое утверждение, действительно, верно.

VIII. Если $\mathscr{E}_k \subset e(s_k)\, e(s_k, \tau)$ при $k = 1, 2, \ldots, n$, где точки s_k удовлетворяют условию $t \leqslant s < s_1 < s_2 < \ldots < s_n < \tau$, а множества $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_n$ не имеют попарно общих точек, то

$$\sum_{k=1}^{n} \omega(t, x, s_k, \mathscr{E}_k) \leqslant \omega(t, x, \tau, \mathscr{E}) + [(\tau - s) K_1 + (\tau - s)^2 K_2] \bar{F}(x, \mathscr{E}),$$

где $\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \ldots + \mathscr{E}_n$. Это свойство функции $\omega(t, x, \tau, \mathscr{E})$ непосредственно вытекает из предыдущего свойства.

IX. Функция $\omega(t, x, \tau, \mathscr{E})$ удовлетворяет следующим предельным условиям:

$$\lim_{\tau \to t+} \omega(t, x, \tau, \mathscr{E}) = E[x, \mathscr{E}\, de(t)],$$

$$\lim_{t \to \tau-} \omega(t, x, \tau, \mathscr{E}) = E[x, \mathscr{E}\, ge(\tau)].$$

Последние равенства легко могут быть доказаны на основании простейших и очевидных свойств функции $\omega(t, x, \tau, \mathscr{E})$ и оценок (9′) и (9″).

§ 2

Если при некотором положительном h $\mathscr{E} \subset e(\tau)\, e(\tau, \tau+h)$, *то функция* $\omega(t, x, \tau, \mathscr{E})$ *непрерывна по* τ *справа и удовлетворяет уравнению*

$$\left[\frac{\partial\omega(t, x, \tau, \mathscr{E})}{\partial\tau}\right]_d = -\int\limits_{\mathscr{E}} \omega(t, x, \tau, d\mathfrak{A}_y)\, p(\tau, y) + \\ + \int\limits_{e(\tau)\, de(\tau)} \omega(t, x, \tau, d\mathfrak{A}_y)\, p(\tau, y)\, P(\tau, y, \mathscr{E}); \qquad (14)$$

функция $\omega(t, x, \tau, \mathscr{E})$ *непрерывна по* τ *слева; если* $\mathscr{E} \subset e(\tau-h, \tau)$ *при некотором положительном* h, *то она удовлетворяет уравнению*

$$\left[\frac{\partial\omega(t, x, \tau, \mathscr{E})}{\partial\tau}\right]_g = -\int\limits_{\mathscr{E}} \omega(t, x, \tau, d\mathfrak{A}_y)\, p(\tau, y) + \\ + \int\limits_{ge(t)} \omega(t, x, \tau, d\mathfrak{A}_y)\, p(\tau, y)\, P(\tau, y, \mathscr{E}). \qquad (14')$$

Замечание. Индексы d и g у знаков производных в последних равенствах означают (как и в дальнейшем), что в первом случае рассматривается производная справа, а во втором — производная слева.

Доказательство. Пусть при некотором положительном h $\mathscr{E} \subset e(\tau)\, e(\tau, \tau+h)$. Применяя формулу (3′) и пользуясь свойством I функции ω, будем иметь

$$\omega(t, x, \tau+\Delta\tau, \mathscr{E}) = \int\limits_{e(\tau)\, de(\tau)} \omega(t, x, \tau, d\mathfrak{A}_y)\, \omega(\tau, y, \tau+\Delta\tau, \mathscr{E}),$$

где $0 < \Delta\tau < h$.

Преобразуя множитель $\omega(\tau, y, \tau+\Delta\tau, \mathscr{E})$ с помощью равенства (11), получим

$$\omega(t, x, \tau+\Delta\tau, \mathscr{E}) = \omega(t, x, \tau, \mathscr{E}) - \Delta\tau \int\limits_{\mathscr{E}} \omega(t, x, \tau, d\mathfrak{A}_y)\, p(\tau, y) + \\ + \Delta\tau \int\limits_{e(\tau)\, de(\tau)} \omega(t, x, \tau, d\mathfrak{A}_y)\, p(\tau, y)\, P(\tau, y, \mathscr{E}) + \Delta\tau(\delta_1 - \delta_2), \qquad (15)$$

где

$$\delta_1 = \frac{1}{\Delta\tau} \int\limits_{e(\tau)\, de(\tau)} \omega(t, x, \tau, d\mathfrak{A}_y)\, o(\tau, y, \tau+\Delta\tau, \mathscr{E}),$$

$$\delta_2 = \frac{1}{\Delta\tau} \int\limits_{e(\tau)\, de(\tau)} \omega(t, x, \tau, d\mathfrak{A}_y)\, \eta(\tau, y, \tau+\Delta\tau, \mathscr{E}).$$

Если $\Delta\tau$, оставаясь положительным, стремится к нулю, то δ_1, в силу свойств функции $o(t, x, \tau, \mathscr{E})$, также стремится к нулю.

Заменим последний интеграл суммой аналогичных интегралов, распространенных на множества $e_1 = e(\tau)\, e(\tau, \tau+\Delta\tau)$ и $e_2 = e(\tau)\,[de(\tau) - e(\tau, \tau+\Delta\tau)]$. Если $y \subset e_1$, то $\eta(\tau, y, \tau+\Delta\tau, \mathscr{E}) \leqslant \Delta\tau^2 K_2$, если же $y \subset e_2$, то можно лишь утверждать, что $\eta(\tau, y, \tau+\Delta\tau, \mathscr{E}) \leqslant \Delta\tau K_1$. Но общая часть множеств e_2, соответствующих всем положительным $\Delta\tau$,

будет, очевидно, пустым множеством, откуда, если $\Delta\tau$, будучи положительным, стремится к нулю, то $\omega(t, x, \tau, e_2)$, а следовательно, и δ_2 тоже стремятся к нулю. Из равенства (15), таким образом, вытекает, что функция $\omega(t, x, \tau, \mathcal{E})$ в рассматриваемом случае действительно непрерывна по τ справа и удовлетворяет уравнению (14).

Отбрасывая теперь предположение, что множество $\mathcal{E}$ принадлежит $e(\tau)\, e(\tau, \tau+h)$, допустим, что оно при некотором положительном h содержится в $e(\tau-h, \tau)$. Применяя равенства (3′) и (11) аналогично тому, как в предыдущем случае, будем иметь

$$\omega(t, x, \tau, \mathcal{E}) = \omega(t, x, \tau-\Delta\tau, \mathcal{E}) - \Delta\tau \int_{\mathcal{E}} \omega(t, x, \tau-\Delta\tau, d\mathfrak{A}_y)\, p(\tau-\Delta\tau, y) +$$

$$+ \Delta\tau \int_{e(\tau-\Delta\tau)} \omega(t, x, \tau-\Delta\tau, d\mathfrak{A}_y)\, p(\tau-\Delta\tau, y)\, P(\tau-\Delta\tau, y, \mathcal{E}) + \Delta\tau(\delta_1' - \delta_2')$$

$$(0 < \Delta\tau < h). \qquad (15')$$

где

$$\delta_1' = \frac{1}{\Delta\tau} \int_{e(\tau-\Delta\tau)} \omega(t, x, \tau-\Delta\tau, d\mathfrak{A}_y)\, o(\tau-\Delta\tau, y, \tau, \mathcal{E}),$$

$$\delta_2' = \frac{1}{\Delta\tau} \int_{e(\tau-\Delta\tau)} \omega(t, x, \tau-\Delta\tau, d\mathfrak{A}_y)\, \eta(\tau-\Delta\tau, y, \tau, \mathcal{E}).$$

Из равенства (15′) вытекает, что функция $\omega(t, x, \tau, \mathcal{E})$ непрерывна по τ слева при принятом условии $\mathcal{E} \subset e(\tau-h, \tau)$, так как, в силу основных свойств функций $o(t, x, \tau, \mathcal{E})$ и $\eta(t, x, \tau, \mathcal{E})$, величины δ_1' и δ_2' ограничены при изменении $\Delta\tau$ в интервале $0 < \Delta\tau < h$.

Отбросим теперь условие $\mathcal{E} \subset e(\tau-h, \tau)$, не заменяя его никаким специальным новым предположением относительно $\mathcal{E}$, и докажем, что непрерывность функции $\omega(t, x, \tau, \mathcal{E})$ по τ слева сохранится.

Действительно, взяв убывающую и имеющую пределом нуль последовательность чисел $h_1, h_2, \ldots$, можно представить множество $\mathcal{E} g e(\tau)$ в виде суммы $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots$ взаимно не налегающих множеств, для которых выполняется условие $\mathcal{E}_k \subset e(\tau-h_k, \tau)$, откуда разность

$$\Delta(\mathcal{E}_k) = \omega(t, x, \tau-\Delta\tau, \mathcal{E}_k) - \omega(t, x, \tau, \mathcal{E}_k)$$

имеет пределом нуль, когда $\Delta\tau$ стремится к нулю, будучи положительным. Так как эта разность по абсолютной величине в силу (12) не превосходит соответствующего члена сходящегося ряда $\sum_{k=1}^{\infty} 2\overline{F}(x, \mathcal{E}_k)$, то при этом также и $\Delta(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots)$ стремится к нулю. Аналогичное обстоятельство имеет место также в силу свойств II и VI функций ω для величины $\Delta[\mathcal{E} - \mathcal{E} g e(\tau)]$, а следовательно, и для разности $\Delta(\mathcal{E}) = \omega(t, x, \tau-\Delta\tau, \mathcal{E}) - \omega(t, x, \tau, \mathcal{E})$, что и требовалось доказать.

Принимая снова условие $\mathcal{E} \subset e(\tau-h, \tau)$, мы можем теперь утверждать, что $\delta_1' \to 0$, если $\Delta\tau$ стремится к нулю справа. Что же касается величины δ_2', то она в в силу свойства 2° функции η не превосходит суммы

$$\frac{1}{\Delta\tau}\int\limits_{e_2'}\omega(t, x, \tau-\Delta\tau, d\mathfrak{A}_y)\,\eta(\tau-\Delta\tau, y, \tau, \mathscr{E})+\frac{1}{\Delta\tau}\int\limits_{e_2'}\omega(t, x, \tau, d\mathfrak{A}_y)(F-F_0)+$$
$$+\frac{1}{\Delta\tau}\int\limits_{\mathfrak{A}}\Delta(d\mathfrak{A}_y)(F-F_0)\,E(y, e_2'),$$

где

$$e_1'=e(\tau-\Delta\tau)\,e(\tau-\Delta\tau, \tau),\quad e_2'=\mathfrak{A}-e(\tau-\Delta\tau, \tau),$$
$$(F-F_0)=F(\tau-\Delta\tau, y, \tau, \mathscr{E})-F_0(\tau-\Delta\tau, y, \tau, \mathscr{E}).$$

Пусть $\Delta\tau$ стремится к нулю, оставаясь положительным; тогда каждое из слагаемых этой суммы стремится к нулю; первое — в силу свойства 3° функции η, второе — в силу (9‴) и монотонности функции $E(y, e_2')$, а третье — в силу (9′) и свойства IV функции ω; величина δ_2', следовательно, при этом также стремится к нулю.

Заменим во втором интеграле равенства (15′) область интегрирования множеством $\mathfrak{A}$, добавляя под знаком интеграла множитель $E[y, e(\tau-\Delta\tau)]$. Представим затем рассматриваемый интеграл в виде суммы аналогичных интегралов, распространенных на множества $\mathfrak{A}-ge(\tau)$ и $ge(\tau)$. Тогда, если $\Delta\tau$ стремится к нулю справа, то первое слагаемое этой суммы, в силу свойства VI функции ω, стремится к нулю; второе же слагаемое стремится к пределу, который можно определить непосредственным предельным переходом под знаком интеграла.

Теперь с помощью равенства (15′) легко убедиться в том, что для функции $\omega(t, x, \tau, \mathscr{E})$ в рассматриваемом случае уравнение (14′), действительно, справедливо.

Функция $\omega(t, x, \tau, \mathscr{E})$ непрерывна по t справа; если $x\subset de(t)$, то она удовлетворяет уравнению

$$\left[\frac{\partial\omega(t, x, \tau, \mathscr{E})}{\partial t}\right]_d=p(t, x)\Big[\omega(t, x, \tau, \mathscr{E})-$$
$$-\int\limits_{de(t)}P(t, x, d\mathfrak{A}_y)\,\omega(t, y, \tau, \mathscr{E})\Big];\tag{16}$$

если $x\subset e(t)\,ge(t)$, то функция $\omega(t, x, \tau, \mathscr{E})$ непрерывна по t слева и удовлетворяет уравнению

$$\left[\frac{\partial\omega(t, x, \tau, \mathscr{E})}{\partial t}\right]_g=p(t, x)\Big[\omega(t, x, \tau, \mathscr{E})-$$
$$-\int\limits_{e(t)\,ge(t)}P(t, x, d\mathfrak{A}_y)\,\omega(t, y, \tau, \mathscr{E})\Big].\tag{16′}$$

Доказательство. Пусть $x\subset de(t)$, т. е. $x\subset e(t, t+h)$ при некотором положительном h. Положим в равенстве (3′) $s=t+\Delta t$, считая Δt положительным и меньшим h, и преобразуем первый множитель под знаком интеграла по формуле (11). Тогда

$$\omega(t, x, \tau, \mathscr{E})=\omega(t+\Delta t, x, \tau, \mathscr{E})-p(t, x)\,\Delta t\Big[\omega(t+\Delta t, x, \tau, \mathscr{E})-$$
$$-\int\limits_{e(t+\Delta t)}P(t, x, d\mathfrak{A}_y)\,\omega(t+\Delta t, y, \tau, \mathscr{E})\Big]+\Delta t(\delta_3-\delta_4),\tag{17}$$

где

$$\delta_3 = \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{e(t+\Delta t)} o(t, x, t+\Delta t, d\mathfrak{A}_y)\, \omega(t+\Delta t, y, \tau, \mathscr{E}),$$

$$\delta_4 = \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{e(t+\Delta t)} \eta(t, x, t+\Delta t, d\mathfrak{A}_y)\, \omega(t+\Delta t, y, \tau, \mathscr{E}).$$

Замечая, что в силу свойства 1° функции η и (10′) величины δ_3 и δ_4, рассматриваемые как функции от Δt, ограничены в интервале $0 < \Delta t < h$, и принимая во внимание свойства I и V функции ω, легко видеть, что последняя, действительно, непрерывна по t справа.

Преобразуем δ_3, заменяя область интегрирования множеством $\mathfrak{A}$ и добавляя под знаком интеграла множитель $E[y, e(t+\Delta t)]$; представим, далее, рассматриваемый интеграл в виде суммы аналогичных интегралов, распространенных на множества $de(t)$ и $\mathfrak{A} - de(t)$. Тогда, в силу равенства (10′) при стремлении Δt к нулю справа δ_3 также стремится к нулю. Величина δ_4, очевидно, не превосходит суммы

$$\frac{1}{\Delta t} \int\limits_{e_3} \eta(t, x, t+\Delta t, d\mathfrak{A}_y)\, \omega(t+\Delta t, y, \tau, \mathscr{E}) + \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{e_4} (F - F_0)\, \omega(t, y, \tau, \mathscr{E}) +$$
$$\frac{1}{\Delta t} \int\limits_{\mathfrak{A}} (F - F_0)\, [\omega(t+\Delta t, y, \tau, \mathscr{E}) - \omega(t, y, \tau, \mathscr{E})]\, E(y, e_4),$$

где

$$e_3 = e(t+\Delta t)\, e(t, t+\Delta t), \qquad e_4 = \mathfrak{A} - e(t, t+\Delta t),$$
$$(F - F_0) = F(t, x, t+\Delta t, d\mathfrak{A}_y) - F_0(t, x, t+\Delta t, d\mathfrak{A}_y).$$

Пусть Δt стремится к нулю справа. Тогда все слагаемые этой суммы в силу (9′), (9‴) и основных свойств функций ω и η стремятся к нулю; следовательно, δ_4 также стремится к нулю.

Преобразовав интеграл в квадратных скобках равенства (17) аналогично тому, как это было сделано в отношении интеграла, входящего в выражение для δ_3, нетрудно убедиться с помощью этого равенства, что функция $\omega(t, x, \tau, \mathscr{E})$, действительно, удовлетворяет уравнению (16).

Пусть теперь при некотором положительном h $x \subset e(t)\, e(t-h, t)$. Применяя равенства (3′) и (11), аналогично предыдущему, будем иметь

$$\omega(t-\Delta t, x, \tau, \mathscr{E}) = \omega(t, x, \tau, \mathscr{E}) - p(t-\Delta t, x)\, \Delta t \Big[\omega(t, x, \tau, \mathscr{E}) -$$
$$- \int\limits_{e(t)\, ge(t)} P(t-\Delta t, x, d\mathfrak{A}_y)\, \omega(t, y, \tau, \mathscr{E}) \Big] + \Delta t\, (\delta_3' - \delta_4') \quad (0 < \Delta t < h), \quad (17')$$

где

$$\delta_3' = \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{e(t)\, ge(t)} o(t-\Delta t, x, t, d\mathfrak{A}_y)\, \omega(t, y, \tau, \mathscr{E}),$$

$$\delta_4' = \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{e(t)\, ge(t)} \eta(t-\Delta t, x, t, d\mathfrak{A}_y)\, \omega(t, y, \tau, \mathscr{E}).$$

Если Δt стремится к нулю справа, то, очевидно, и δ_3' также будет стремиться к нулю. Но то же имеет место и по отношению к δ_4', что

легко доказать, заменяя последний интеграл суммой аналогичных интегралов, распространенных на множества $e_3' = e(t)\,e(t-\Delta t, t)$ и $\mathfrak{A}$, и добавляя под знаком второго из этих интегралов множитель $E(y, e_4')$, где $e_4' = e(t)\,ge(t) - e(t-\Delta t, t)$.

Из равенства (17′), как теперь легко видеть, вытекает, что функция $\omega(t, x, \tau, \mathcal{E})$ в рассматриваемом случае, действительно, непрерывна по t слева и удовлетворяет уравнению (16′).

В следующем параграфе мы рассмотрим вопрос о разрешимости выведенных уравнений (14), (14′) (16) и (16′).

§ 3

Обозначим через $T(t, \tau, x)$ верхнюю грань значений s из интервала времени $t \leqslant s < \tau$, при которых элемент x не принадлежит $e(s)$, полагая $T(t, \tau, x) = t$, если такие значения s отсутствуют. Множество $\mathring{e}(s, \tau)$, очевидно, представляет собой совокупность x, при которых $T(t, \tau, x) \leqslant s$, следовательно, в силу предположения об измеримости множеств $e(t, \tau)$, функция $T(t, \tau, x)$ измерима относительно x и семейства $\mathfrak{M}$. Рассмотрим, кроме того, верхнюю грань $L(t, \tau, \mathcal{E})$ множества значений функции $T(t, \tau, x)$, соответствующих всем x, содержащимся в $\mathcal{E}$, а также нижнюю грань $l(t, \tau, \mathcal{E})$ этого множества; при этом мы будем считать значения функций $L(t, \tau, \mathcal{E})$ и $l(t, \tau, \mathcal{E})$ в случае, если $\mathcal{E}$ — пустое множество, равными t.

Пусть $L(t, \tau, \mathcal{E}) < \tau$ для некоторого $\mathcal{E}$ из семейства $\mathfrak{M}$. Тогда функция $\omega(t, x, s, \mathcal{E})$ будет непрерывна по s в интервале $L(t, \tau, \mathcal{E}) < s \leqslant \tau$ и для любого τ_0 из этого интервала, понимая под зависимостью $e^*(s)$ либо $e(s)\,de(s)$, либо $ge(s)$, можно, очевидно, написать

$$\omega(t, x, \tau, \mathcal{E}) = \omega(t, x, \tau_0\, \mathcal{E}) + \int_{\tau_0}^{\tau} ds \Big[-\int_{\mathcal{E}} \omega(t, x, s, d\mathfrak{A}_y)\, p(s, y) + \int_{e^*(s)} \omega(t, x, s, d\mathfrak{A}_y)\, p(s, y)\, P(s, y, \mathcal{E}) \Big]. \tag{18}$$

Из последнего равенства вытекает существование предела $\omega(t, x, \tau_0, \mathcal{E})$, когда τ_0 стремится к $L(t, \tau, \mathcal{E})$ справа, а также соответствующее предельное равенство.

Введем обозначение

$$\Omega(t, x, \tau, \mathcal{E}) = \int_{L(t, \tau, \mathcal{E})}^{\tau} ds \Big[-\int_{\mathcal{E}} \omega(t, x, s; d\mathfrak{A}_y)\, p(s, y) + \int_{e^*(s)} \omega(t; x, s, d\mathfrak{A}_y)\, p(s, y)\, P(s, y, \mathcal{E}) \Big]. \tag{19}$$

Теперь только что упомянутое предельное равенство можно представить в виде

$$\omega(t, x, \tau, \mathcal{E}) = \omega[t, x, L(t, \tau, \mathcal{E}) + 0, \mathcal{E}] + \Omega(t, x, \tau, \mathcal{E}). \tag{20}$$

Предположим, далее, что множество $\mathcal{E}$ принадлежит семейству $\mathfrak{M}$, содержится в множестве $ge(\tau)$ и не имеет ни одного элемента, содержащегося в $e(t, \tau)$. Рассмотрим возрастающую последовательность чисел $t_0 = t, t_1, t_2, \ldots$, имеющую пределом τ, и обозначим через δ наибольшую из разностей $t_k - t_{k-1}$; каждому интервалу $t_{k-1} < s \leqslant t_k$ приведем в соответствие совокупность $\mathcal{E}_k$ всех элементов x множества $\mathcal{E}$, для которых выполняется условие $t_{k-1} < T(t, \tau, x) \leqslant t_k$, полагая $L_k = L(t, \tau, \mathcal{E}_k)$, $l_k = l(t, \tau, \mathcal{E}_k)$. Тогда в силу равенства (20)

$$\omega(t, x, \tau, \mathcal{E}) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega(t, x, L_k + 0, \mathcal{E}_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \Omega(t, x, \tau, \mathcal{E}_k). \quad (21)$$

Выясним, во что обращается последнее равенство в пределе, когда δ стремится к нулю.

Взяв положительное число α и применяя соотношение (3′) для одного из непустых множеств последовательности $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots$, получим

$$\omega(t, x, L_k + \alpha, \mathcal{E}_k) = \int\limits_{e(l_k)\, ge(l_k)} \omega(t, x, l_k, d\mathfrak{A}_y)\, \omega(l_k, y, L_k + \alpha, \mathcal{E}_k).$$

Событие, соответствующее вероятности $\omega(l_k, y, L_k + \alpha, \mathcal{E}_k)$, очевидно, предполагает изменение состояния до момента времени $L_k + \alpha$, если $y \not\subset \mathcal{E}_k$; то же можно сказать в случае, когда $y \subset E_k e(l_k)\, ge(l_k)$, ибо тогда величина $T(t, \tau, y)$, содержащаяся в интервале $l_k \leqslant s \leqslant L_s$, больше l_k. Из последнего равенства в силу соотношений (8′), (9″) и (12) вытекает

$$\omega(t, x, L_k + \alpha, \mathcal{E}_k) \leqslant \int\limits_{\mathfrak{A}} \bar{F}(x, d\mathfrak{A}_y) \left[K \int\limits_{l_k}^{L_k + \alpha} P(s, y, \mathcal{E}_k)\, ds + K_2 (L_k - l_k + \alpha)^2 \right],$$

откуда

$$\omega(t, x, L_x + 0, \mathcal{E}_k) \leqslant (L_k - l_k) \int\limits_{\mathfrak{A}} \bar{F}(x, d\mathfrak{A}_y)\, [K P(s_k, y, \mathcal{E}_k) + \\ + K_2 (L_k - l_k)], \quad (22)$$

где $l_k \leqslant s_k \leqslant L_k$.

Точно так же можно доказать, что последнее неравенство остается в силе, если в нем $\mathcal{E}_k$ заменить разностью $\mathcal{E}_k - \mathcal{E}'_k$, где $\mathcal{E}'_k$ — совокупность элементов x множества $\mathcal{E}_k$, для которых $T(t, \tau, x) = L_k$. Заметим, кроме того, что, в силу свойства IV функции $\omega(t, x, \tau, \mathcal{E})$, $\omega(t, x, L_k + 0, \mathcal{E}'_k) = 0$ и, следовательно, неравенство (22) сохранится также, если в правой только его части заменить $\mathcal{E}_k$ на $\mathcal{E}_k - \mathcal{E}'_k$. Легко видеть теперь, что отношение левой части соотношения (22) к разности $t_k - t_{k-1}$ стремится к нулю, если при определенном значении одной из величин t_{k-1} и t_k другая стремится к ней как к пределу. Основываясь на последнем обстоятельстве, а также на свойстве VIII функции $\omega(t, x, \tau, \mathcal{E})$, нетрудно доказать методом сведения к противоречию, что первая сумма $S(t, \tau, \mathcal{E})$, входящая в равенство (21), стремится к нулю вместе с δ.

Действительно, прежде всего, аналогичная сумма, относящаяся к интервалу $t' = t_k < s \leqslant \tau$ и множеству $\mathscr{E}_{k+1} + \mathscr{E}_{k+2} + \ldots$, в силу (12), сколь угодно мала, если достаточно мала длина этого интервала (независимо от закона его подразделения). Допустим теперь, что для некоторого положительного числа ε при определенном $t' = t_k$ сумма

$$S(t, t', \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \ldots + \mathscr{E}_k) = \omega(t, x, L_1 + 0, \mathscr{E}_1) + \omega(t, x, L_2 + 0, \mathscr{E}_2) + \\ + \ldots + \omega(t, x, L_k + 0, \mathscr{E}_k)$$

путем надлежащего подбора точек деления $t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}$ может быть сделана больше ε при сколь угодно малом δ. Тогда существует последовательность интервалов $a_n < s \leqslant b_n$, где $t \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots$, $t' \geqslant b_1 \geqslant \geqslant b_2 \geqslant \ldots$, $b_n - a_n = \frac{t' - t}{2^n}$, причем конечная сумма, аналогичная сумме $S(t, \tau, \mathscr{E})$, соответствующая интервалу $a_n < s \leqslant b_n$ и совокупности элементов x множества $\mathscr{E}$, для которых $a_n < T(t, \tau, x) \leqslant b_n$, может быть сделана большей, чем $\frac{\varepsilon_1}{2^n}$ при сколь угодно малом δ (ε_1 — любое постоянное положительное число, меньшее ε). Этот вывод, однако, приводит к противоречию, ибо, принимая во внимание указанное выше свойство неравенства (22), свойство VIII функции $\omega(t, x, \tau, \mathscr{E})$ и полную аддитивность мажоранты $\overline{F}(x, \mathscr{E})$, нетрудно обнаружить, что суммы

$$S[a_n, c, e(a_n, \tau)\mathscr{E} - e(c, \tau)\mathscr{E}] \text{ и } S[c, b_n, e(c, \tau)\mathscr{E} - e(b_n, \tau)\mathscr{E}],$$

где c — общий предел a_n и b_n при $n \to \infty$, будут при неограниченном возрастании n бесконечно малыми более высокого порядка, чем разности $b_n - a_n$, независимо от закона подразделения соответствующих им интервалов.

Возвращаясь к равенству (21), мы можем утверждать, что другая входящая в него сумма имеет определенный предел, когда δ стремится к нулю. Этот предел будет некоторой вполне аддитивной функцией — интегралом в смысле Колмогорова от функции Ω, распространенным на множество $\mathscr{E}$. Основываясь на том, что функция Ω представляет собою разность двух неотрицательных полуаддитивных функций множества ([2]), можно было бы доказать существование этого интеграла непосредственно, понимая его, как предел соответствующей суммы в смысле Moor'a ([7]). Однако этот результат был бы менее силен, чем полученный. Равенство (21) в пределе, когда δ стремится к нулю, принимает вид

$$\omega(t, x, \tau, \mathscr{E}) = \int_{\mathscr{E}} \Omega(t, x, \tau, d\mathscr{E}). \tag{21'}$$

Теперь мы можем сформулировать следующий основной результат:

Пусть выполняются условия: $-T < t < \tau < T$, $x \subset \mathfrak{A}$, $\mathscr{E} \subset \mathfrak{M}$, — *тогда функция* $\omega(t, x, \tau, \mathscr{E})$ *удовлетворяет интегральному уравнению*

$$\omega(t, x, \tau, \mathscr{E}) = E[x, e(t, \tau)\mathscr{E}] + \int_{\mathscr{E}} \Omega(t, x, \tau, d\mathscr{E}), \tag{23}$$

где функция Ω *определяется равенством* (19), *в котором под* $e^*(s)$ *нужно понимать какую-либо из зависимостей* $e(s)\, de(s)$ *или* $ge(s)$.

В самом деле, положим $\mathcal{E}_{(1)} = \mathcal{E}\,[ge(\tau) - e(t, \tau)]$, $\mathcal{E}_{(2)} = \mathcal{E} \cdot e(t, \tau)$, $\mathcal{E}_{(3)} = \mathcal{E}\,[\mathfrak{A} - ge(\tau)]$. Для множества $\mathcal{E}_{(1)}$ уравнение (23) удовлетворяется согласно только что доказанному; для множества $\mathcal{E}_{(2)}$ это уравнение удовлетворяется также и может быть получено из равенства (18) путем предельного перехода при $\tau_0 \to t+$; наконец, для множества $\mathcal{E}_{(3)}$ уравнение (23) обращается в очевидное тождество,—следовательно, оно справедливо и для всего множества $\mathcal{E}$.

Перейдем теперь к доказательству существования и единственности решения уравнения (23).

Определим последовательность измеримых и вполне аддитивных функций $\omega_n(t, x, \tau, \mathcal{E})$ следующим образом. Обозначим через $\Omega_n(t, x, \tau, \mathcal{E})$ левую часть равенства (19) при $\omega = \omega_n$, положим

$$\omega_0(t, x, \tau, \mathcal{E}) = E\,[x, e(t, \tau)\,\mathcal{E}], \tag{24}$$

$$\omega_{n+1}(t, x, \tau, \mathcal{E}) = \int\limits_{\mathcal{E}} \Omega_n(t, x, \tau, d\mathcal{E}) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{24'}$$

Для вариации $V_n(t, x, \tau, \mathcal{E})$ функции $\omega_n(t, x, \tau, \mathcal{E})$ на множестве $\mathcal{E}$ имеет место оценка

$$V_n(t, x, \tau, \mathcal{E}) \leqslant \frac{(\tau - t)^n}{n!}(2K)^n. \tag{25}$$

Действительно, предполагая эту оценку верной при некотором n, нетрудно доказать существование интеграла, определяющего ω_{n+1}, представляя $\Omega_n(t, x, \tau, \mathcal{E})$ в виде разности $\Omega'_n(t, x, \tau, \mathcal{E}) - \Omega''_n(t, x, \tau, \mathcal{E})$ неотрицательных полуаддитивных функций путем подстановки в правую часть равенства (19) вместо ω разности $V'_n - V''_n$, где $V'_n = \frac{1}{2}(V_n + \omega_n)$, $V''_n = \frac{1}{2}(V_n - \omega_n)$. Каждая из полученных в результате этой подстановки функций Ω'_n и Ω''_n не превосходит соответствующего значения вполне аддитивной функции

$$\overline{\Omega}_n(t, x, \tau, \mathcal{E}) =$$

$$= K\int\limits_t^\tau ds\left[V_n(t, x, s, \mathcal{E}) + \int\limits_{e^*(s)} V_n(t, x, s, d\mathfrak{A}_y)\, P(s, y, \mathcal{E})\right], \tag{26}$$

откуда и вытекает существование интеграла, определяющего ω_{n+1}. Нетрудно убедиться, что каждая из величин $|\Omega_n(t, x, \tau, \mathcal{E})|$, $|\omega_{n+1}(t, x, \tau, \mathcal{E})|$ и $V_{n+1}(t, x, \tau, \mathcal{E})$ также не превосходит соответствующего значения функции (26), которое, очевидно, в силу (25) не больше

$$\frac{(\tau - t)^{n+1}}{(n+1)!}(2K)^{n+1}.$$

Неравенство (25), верное при $n = 0$, доказано, таким образом, и вообще.

Ряды

$$\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n, \qquad \omega = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n, \qquad V = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \tag{27}$$

будут, следовательно, равномерно сходящимися. Из представления функции Ω_n в виде разности неотрицательных, полуаддитивных функций Ω'_n и Ω''_n и из сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} V_n$ вытекает, что функция Ω может быть также представлена в виде разности аналогичных функций Ω' и Ω'', причем интегралы от последних в смысле Колмогорова относительно $\mathcal{E}$ и $\mathfrak{M}$ конечны. В силу этого в таком же смысле будет интегрируемой и функция Ω.

Докажем теперь равенство

$$\int_{\mathcal{E}} \Omega(t, x, \tau, d\mathcal{E}) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathcal{E}} \Omega_n(t, x, \tau, d\mathcal{E}). \tag{28}$$

Так как $|\Omega_n|$ не превосходит вполне аддитивной функции (26), то $R_N = \sum_{n=N}^{\infty} \Omega_n$, а следовательно, также и $\int_{\mathcal{E}} R_N(t, x, \tau, d\mathcal{E})$ не превосходят по абсолютной величине вполне аддитивной функции, получающейся путем замены в правой части равенства (26) V_n на $\sum_{n=N}^{\infty} V_n$. Но в результате этой замены получается функция, которая в силу оценки (25) не превосходит выражения

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{(\tau-t)^{n+1}}{(n+1)!} (2K)^{n+1},$$

и, следовательно, при неограниченном возрастании N стремится к нулю. Тем более это справедливо для $\int_{\mathcal{E}} R_N(t, x, \tau, d\mathcal{E})$, откуда и вытекает равенство (28).

Суммируя почленно равенства (24) и (24′) при $n = 0, 1, 2, \ldots$ и производя аналогичную операцию с равенствами, определяющими функции Ω_n, убеждаемся, что функции ω и Ω, выражаемые рядами (27), связаны соотношениями (19) и (23).

Предположим, что существует вполне аддитивная функция $\bar{\omega}(t, x, \tau, \mathcal{E})$, отличная от построенной функции ω, удовлетворяющая уравнению (23) и обладающая тем свойством, что ее вариация относительно $\mathcal{E}$ на множестве $\mathfrak{A}$ будет функцией от τ, суммируемой в интервале $-T < \tau < T$. Разность $\bar{\omega} - \omega$ должна удовлетворять соответствующему однородному уравнению; таким образом, вариация $W(t, x, \tau, \mathcal{E})$ этой разности на множестве $\mathcal{E}$ не превосходит результата замены в правой части равенства (26) V_n на W. Из последнего обстоятельства следует, что

$$W(t, x, \tau, \mathcal{E}) \leqslant 2K \int_t^{\tau} W(t, x, s, \mathfrak{A})\, ds;$$

отсюда при помощи индукции легко вывести неравенства

$$W(t, x, \tau, \mathfrak{A}) \leqslant \frac{(\tau-t)^n}{n!} (2K)^{n+1} \int_{-T}^{T} W(t, x, s, \mathfrak{A})\, ds \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

из которых, наконец, вытекает тождественное совпадение функций $\overline{\omega}$ и ω. Существование и единственность решения уравнения (23) доказаны.

Обратимся теперь к разрешимости уравнений (16) и (16′). Обозначим через $T^*(t, \tau, x)$ нижнюю грань значений s из интервала $t < s \leqslant \tau$, при которых элемент x не принадлежит множеству $e(s)$, полагая $T^*(t, \tau, x) = \tau$, если такие значения s отсутствуют. Как и в аналогичном случае, рассмотренном выше, легко убедиться, что функция $T^*(t, \tau, x)$ измерима по x относительно $\mathfrak{M}$.

Теперь можно сформулировать следующий основной вывод по отношению к исследуемой вероятности $\omega(t, x, \tau, \mathscr{E})$:

Пусть выполняются условия: $-T < t < \tau < T$; $x \subset \mathfrak{A}$, $\mathscr{E} \subset \mathfrak{M}$, тогда функция $\omega(t, x, \tau, \mathscr{E})$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\omega(t, x, \tau, \mathscr{E}) = E[x, e(t, \tau)\mathscr{E}] -$$

$$- \int_t^{T^*(t,\tau,x)} ds\, p(s, x)\left[\omega(s, x, \tau, \mathscr{E}) - \int_{e^{**}(s)} P(s, x, d\mathfrak{A}_y)\,\omega(s, y, \tau, \mathscr{E})\right], \quad (29)$$

где под $e^{**}(s)$ нужно понимать какую-либо из зависимостей $de(s)$ и $e(s)\,ge(s)$.

В самом деле, если $x \subset de(t)$, то последнее уравнение получается в результате почленного интегрирования уравнений (16) и (16′); если же $x \not\subset de(t)$, то уравнение (29) обращается в очевидное тождество.

Перейдем теперь к доказательству существования и единственности решения уравнения (29). Определим последовательность измеримых и вполне аддитивных функций $\omega_0^*, \omega_1^*, \omega_2^*, \ldots$ следующим образом: положим

$$\omega_0^*(t, x, \tau, \mathscr{E}) = E[x, e(t, \tau)\mathscr{E}], \quad (30)$$

$$\left.\begin{aligned} \omega_{n+1}^*(t, x, \tau, \mathscr{E}) = - \int_t^{T^*(t,\tau,x)} ds\, p(s, x)\left[\omega_n^*(s, x, \tau, \mathscr{E}) - \right. \\ \left. - \int_{e^{**}(s)} P(s, x, d\mathfrak{A}_y)\,\omega_n^*(s, y, \tau, \mathscr{E})\right] \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \end{aligned}\right\} \quad (30')$$

Применяя метод индукции, из последних равенств легко вывести оценку

$$|\omega_n^*(t, x, \tau, \mathscr{E})| \leqslant \frac{(\tau - t)^n}{n!}(2K)^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \quad (31)$$

следовательно, ряд

$$\omega^*(t, x, \tau, \mathscr{E}) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n^*(t, x, \tau, \mathscr{E}) \quad (32)$$

абсолютно и равномерно сходится.

Суммируя почленно равенства (30) и (30′) при $n = 0, 1, 2, \ldots$ и изменяя порядок интегрирования и суммирования, приходим к выводу, что определенная рядом (32) и равенствами (30) и (30′) функция ω^* будет решением уравнения (29).

Предположим, что существует функция $\bar{\omega}^*(t, x, \tau, \mathcal{E})$, отличная от построенной функции ω^*, удовлетворяющая уравнению (29) и обладающая тем свойством, что ее верхняя грань, соответствующая всем $x \subset \mathfrak{A}$, будет функцией от t, суммируемой в интервале $-T < t < T$. Так как разность $\bar{\omega}^* - \omega^*$ удовлетворяет уравнению, получаемому из (29) путем отбрасывания первого члена в правой части, то для верхней грани $M(t, \tau, \mathcal{E})$ этой разности, соответствующей всем $x \subset \mathfrak{A}$, имеет место соотношение

$$M(t, \tau, \mathcal{E}) \leqslant 2K \int_t^{\tau} M(s, \tau, \mathcal{E})\, ds,$$

откуда, применяя метод индукции, нетрудно вывести неравенства

$$M(t, \tau, \mathcal{E}) \leqslant \frac{(\tau - t)^n}{n!} (2K)^{n+1} \int_{-T}^{+T} M(s, \tau, \mathcal{E})\, ds \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Из этих неравенств вытекает, что $M(t, \tau, \mathcal{E}) \equiv 0$ и, следовательно, $\bar{\omega}^* = \omega^*$.

Существование и единственность решения уравнения (29), таким образом, доказаны.

Поступило
6. II. 1943

ЛИТЕРАТУРА

[1] Radon I., Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen, Sitzungsb. d. Akad. d. Wiss. Wien, Math.-naturw. Kl., 122, Abt. IIa (1913).
Fréchet, Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendue à un ensemble abstrait, Bull. de la Soc. Math. de France, 43 (1915).
[2] Kolmogoroff A., Untersuchungen über den Integralbegriff, Math. Ann., 103 (1930).
[3] Дубровский В. М., Обобщение теории чисто-разрывных случайных процессов W. Feller'a, Докл. Акад. Наук СССР, 19 (1938), 439—446.
[4] Kolmogoroff A., Über die analytischen Methoden in Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Ann., 104 (1930).
[5] Feller W., Zur Theorie der stochastischen Prozesse, Math. Ann., 113 (1936).
[6] Дубровский В., Об одной краевой задаче теории вероятностей, Изв. Акад. Наук СССР, серия матем., 4 (1940), 411—416.
[7] Moore and Smith, A general theory of limit, Amer. Journ. of Math., 44 (1922).

V. DUBROVSKY. INVESTIGATION OF PURELY DISCONTINUOUS RANDOM PROCESSES BY MEANS OF INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

SUMMARY

Given a set $\mathfrak{A}$ of elements x and a family $\mathfrak{M}$ of sets included in $\mathfrak{A}$. All elements of $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ itself and the void set belong to $\mathfrak{M}$. The finite and the enumerable sums as well as the differences of sets belonging to $\mathfrak{M}$, also belong to $\mathfrak{M}$. Let $e(s)$ be a set from $\mathfrak{M}$ that depends on the time s. Let, further, $e(t, \tau) = \Pi e(s) \subset \mathfrak{M}$, where the product is taken over an arbitrary interval $t < s < \tau$.

Let $\mathfrak{R}$ be «a thing» strolling through the abstract space $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{R}$ is supposed to be instantly transferred from element to element a finite number of times during an arbitrary time-interval. The probability $p_1(t, x, \tau)$ that $\mathfrak{R}$, being on x at the moment t, would change its position exactly once before the moment τ, is expressed by the equality (1), where $p(t, x)$ is a bounded function, continuous in t and measurable in x with respect to $\mathfrak{M}$ and $\varepsilon(t, x, \tau)$ is bounded and tends to zero as $\tau \to t+$ or $t \to \tau-$.

The probability that $\mathfrak{R}$, leaving the element x at the moment t, would be transferred into the set $\mathcal{E}$ at the same moment, is determined by a function $P(t, x, \mathcal{E})$ continuous in t and measurable in x with respect to $\mathfrak{M}$. Let $\mathfrak{R}$ be on x at the moment t. Denote by $\omega(t, x, \tau, \mathcal{E})$ the probability that $\mathfrak{R}$ would be on the set $\mathcal{E}$ at the moment τ and that at every moment s such that $t < s < \tau$ $\mathfrak{R}$ would be on a prescribed set $e(s)$ depending on s. Let, further, the sets $de(t)$ and $ge(t)$ be defined by the equalities (13).

We prove in this paper that the function $\omega(t, x, \tau, \mathcal{E})$ satisfies the equations (14), (14′), (16) and (16′). We take the right-hand derivatives in equations (14), (16) and the left-hand derivatives — in (14′), (16′). The integrals are to be understood in Lebesgue — Stieltjes' sense. Moreover we prove here that these equations reduce to some integral equations that can be solved by successive approximations. The uniqueness of the solutions is also established.

The integral equations corresponding to the equations (14) and (14′) are expressed and studied by means of integrals in the sense of Kolmogoroff.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 8 (1944), 129—138 Série mathématique

И. А. ВАЙНШТЕЙН и Я. М. КАЖДАН

КОНЕЧНОКРАТНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ, ПОВЫШАЮЩИЕ РАЗМЕРНОСТЬ

(*Представлено академиком* А. Н. Колмогоровым)

В работе изучаются ядра точек при непрерывных конечнократных отображениях, повышающих размерность.

Нашей задачей является изучение свойств отображений f пространства X на пространство Y, при которых происходит повышение размерности. При этом во всей работе мы понимаем под «пространством» метрическое пространство со счетной базой, а под «отображением» — непрерывное замкнутое отображение. В этой области имеются следующие основные результаты.

Пусть пространство X отображается на пространство Y.

Назовем кратностью $\mu(y)$ точки $y \in Y$ мощность множества $f^{-1}(y)$; кратностью точки $x \in X$ — мощность множества $f^{-1}(y)$, где $y = f(x)$. Если кратность всех точек конечная, то отображение называется конечнократным; если кратность всех точек $\leqslant n$ и имеются точки кратности n, то отображение называется n-кратным.

Hurewicz'ем (1) и Freudenthal'ем (2) доказаны следующие теоремы:

ТЕОРЕМА. 1. *Пусть при конечнократном отображении f пространства X на пространство Y имеем* $\dim Y - \dim X = n$. *Тогда число различных значений, принимаемых кратностью* $\mu(y)$, *по крайней мере равно* $n+1$.

Эта теорема может быть усилена, если X удовлетворяет условию:

(α) Каждое нигде не плотное в X замкнутое множество имеет размерность меньшую, чем все пространство X (или, что то же самое, всякое замкнутое в X множество, имеющее ту же размерность, что и X, содержит открытое множество).

Именно:

ТЕОРЕМА 2. *При условии* (α), *если* $\dim Y - \dim X = n > 0$, *то число различных значений, принимаемых кратностью* $\mu(y)$, *по крайней мере равно* $n+2$. [Hurewicz (1)].

Наконец,

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $\dim X = n$, $\dim Y = m > n$ *и полный прообраз каждой точки* $y \in Y$ *нульмерен. Тогда множество* Y_k *точек простран-*

ства Y с кратностью $\mu(y)=k$ для всех $k \leqslant m-n+1$ по крайней мере *$(m-k+1)$-мерно*: $\dim Y_k \geqslant m-k+1$ [Freudenthal (2)].

Более полное изучение отображений, повышающих размерность, требует введения следующего понятия*:

Ядром данной точки $y \in Y$ при отображении f называется множество $A \subseteq f^{-1}(y)$, удовлетворяющее следующим условиям:

1° образ любой окрестности $U(A)$ множества A содержит y, как внутреннюю точку;

2° никакая правильная часть A не удовлетворяет условию 1°.

Без всякого труда убеждаемся в справедливости следующей теоремы:

ТЕОРЕМА I. *Каждая точка $b \in Y$ имеет по крайней мере одно ядро.*

Доказательство. Достаточно показать, что полный прообраз $f^{-1}(b)$ каждой точки $b \in Y$ удовлетворяет условию 1°. Возьмем произвольную окрестность U множества $f^{-1}(b)$. Так как f замкнутое отображение, а $X \setminus U$ — замкнутое множество, то $f(X \setminus U)=B$ есть замкнутое (в Y) множество, не содержащее точки b. Поэтому $Y \setminus U$ есть окрестность точки b. Если бы существовала точка x, принадлежащая $f^{-1}(Y \setminus B)$ и $X \setminus U$, то $f(x) \in Y \setminus B$ и $f(x) \in B$, что нелепо. Поэтому

$$f^{-1}(Y \setminus B) \cap (X \setminus U)=0,$$

т. е.

$$f^{-1}(Y \setminus B) \subseteq U \text{ и } f(U) \supseteq Y \setminus B,$$

т. е. b — внутренняя точка множества U, что и требовалось доказать.

Точка может иметь несколько ядер. Для данной точки всякое ядро наименьшей мощности называется минимальным ядром.

Отображение f пространства X на пространство Y называется неприводимым**, если никакое замкнутое правильное подмножество пространства X не отображается при этом отображении на всё Y.

ТЕОРЕМА II. *При неприводимом конечнократном отображении f пространства X на пространство Y каждая точка $y \in Y$ имеет лишь одно ядро (совпадающее с множеством $f^{-1}(y)$).*

Доказательство. В самом деле, рассмотрим произвольную точку y. Допустим, что в $f^{-1}(y)$ существует ядро $A \subset f^{-1}(y)$, $A \neq f^{-1}(y)$. Пусть $x \in f^{-1}(y) \setminus A$. В силу конечнократности отображения можно найти непересекающиеся окрестности $U(x)$ и $U(A)$. Так как A — ядро и отображение непрерывно, то найдется такая окрестность $U'(x) \subset U(x)$, что $f(U')(x) \subset f_1(U(A))$. Следовательно, замкнутое множество $X \setminus U'(x)$ отображается на все Y, что противоречит неприводимости отображения.

Таким образом, если при неприводимом отображении f, $\dim Y - \dim X = n$, то по теореме Hurewicz'a существуют минимальные ядра, мощности которых принимают $n+1$ различное значение.

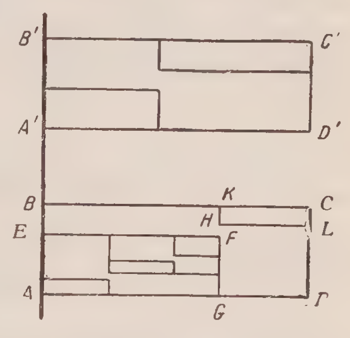
---

* Понятие введено П. С. Александровым (по предложению и под руководством которого и выполнено настоящее исследование).

** Понятие впервые введено Ю. А. Рожанской.

Требование неприводимости здесь существенно. Легко построить пример непрерывного замкнутого (но не неприводимого) отображения, повышающего размерность на 1, при котором каждое минимальное ядро состоит из одной точки.

Пример 1. Рассмотрим следующую конструкцию. В прямоугольник $ABCD$, 1-го ранга, вписываем два непересекающиеся прямоугольника 2-го ранга — $AEFG$ и $CLHK$ так, чтобы стороны FG и HK лежали на одной вертикали. В каждом из прямоугольников 2-го ранга делаем такое же построение и т. д. Вообще в каждый прямоугольник n-го ранга вписываем два непересекающиеся прямоугольника $(n+1)$-го ранга, примыкающие — один к нижней левой, а другой — к верхней правой вершине прямоугольника n-го ранга и такие, чтобы их смежные вертикальные стороны лежали на одной вертикали. Пусть диаметр прямоугольников стремится к нулю с номером n и ни один прямоугольник не вырождается в отрезок. Тогда сумма P пересечений всех последовательностей вложенных друг в друга прямоугольников, будет, очевидно, нульмерным компактом.



Рассмотрим вертикальную проекцию множества P на отрезок AD. Образом P при этом отображении будет весь отрезок AD. Это будет двукратное непрерывное отображение, причем множество M двукратных точек счетно (M состоит из проекций вертикальных сторон прямоугольников). Так как отображение неприводимо, то все ядра совпадают с прообразами.

Такую же конструкцию повторяем в прямоугольнике $A'B'C'D'$, расположенном точно над прямоугольником $ABCD$, причем так, чтобы соответствующее множество M' (двухкратных точек) не пересекалось с M. Этого можно достигнуть благодаря счетности M и M'. Полученное множество обозначим через P'. При отображении $P \cup P'$ на AD, очевидно, все минимальные ядра состоят из одной точки.

В дальнейшем нам придется пользоваться следующим тривиальным замечанием. Пусть дано замкнутое отображение f пространства X на пространство Y. Пусть B — произвольное множество пространства Y и $A = f^{-1}(B)$. Тогда отображение f пространства A на пространство B замкнуто. Пусть, далее, C — замкнутое множество пространства X и $D = f(C)$. Тогда отображение f пространства C на пространство D замкнуто.

Рассмотрим частный случай $(n+1)$-кратного отображения, при котором размерность повышается на n. Имеет место следующая

ТЕОРЕМА III. *Если при $(n+1)$-кратном отображении f пространства X на пространство Y,* $\dim Y - \dim X = n$, *то при любом $k = 1, 2, \ldots, n+1$ среди точек кратности k имеется по крайней мере одна точка y, минимальное ядро которой совпадает с полным прообразом.*

Обозначим через Y^k множество точек кратности k и через Y_k — множество точек кратности $\geqslant k$. Как известно ([1]), Y_k при любом k представляют собою множества типа F_σ. Рассмотрим множества $X^1 = f^{-1}(y^1)$. Пусть $f(\overline{X}^1) = Y^*$.

ЛЕММА 1. *При предположениях теоремы* III,

$$\dim Y^* = \dim Y.$$

Доказательство. В самом деле; $Y \setminus Y^* \subset Y_2$. При отображении множества $f^{-1}(Y_2)$ на Y_2 кратность $\mu(y)$ принимает лишь n различных значений. Так как отображение f, рассматриваемое лишь на $f^{-1}(Y_2)$, продолжает быть замкнутым, то по теореме Hurewicz'a

$$\dim Y_2 \leqslant \dim f^{-1}(Y_2) + n - 1 \leqslant \dim X + n - 1.$$

Следовательно, и

$$\dim (Y \setminus Y^*) \leqslant \dim X + n - 1 < \dim Y.$$

Так как $Y \setminus Y^*$ и Y^* суть множества F_σ и $Y = Y^* \cup (Y \setminus Y^*)$, то по теореме сложения

$$\dim Y^* = \dim Y.$$

ЛЕММА 2. *Пусть при конечнократном отображении f пространства X на пространство Y имеем $\dim Y - \dim X = n$. Пусть $x \in \overline{X}^1$ и $f(x) = y$. Тогда множество $\{f^{-1}(y) \setminus x\}$ не содержит ядра.*

Доказательство. Докавываем эту лемму от противного. Пусть $\{f^{-1}(y) \setminus x\}$ содержит ядро A. Возьмем непересекающиеся окрестности $U(A)$ и $U(x)$. Так как A — ядро и отображение непрерывно, то существует такая окрестность $U'(x) \subset U(x)$, что $f(U'(x)) \subset f(U(A))$ и, следовательно, $f(X \setminus U'(x)) = Y$. Но так как $x \in \overline{X}^1$, в $U'(x)$ войдут точки кратности 1. Образы этих точек не войдут в $f(X \setminus U'(x))$. Получаем противоречие.

Доказательство теоремы III. Допустим, что теорема III неверна, т. е. что при некотором k для всех точек $y \in Y^k$ каждое минимальное ядро имеет мощность, меньшую k. Тогда из леммы 2 следует, что ни один полный прообраз точек $y \in Y^k$ не войдет в $\overline{X}^1$. Следовательно (обозначив через Y_k^* множество точек $y \in Y^*$ кратности $\geqslant k$), при отображении $\overline{X}^1$ на Y^* имеем

$$Y_k^* \subset Y_{k+1}. \tag{1}$$

При непрерывном замкнутом отображении f множества $f^{-1}(Y_{k+1})$ на Y_{k+1} кратность принимает лишь $n - k + 1$ значений. Поэтому по теореме Hurewicz'a

$$\dim Y_{k+1} \leqslant \dim f^{-1}(Y_{k+1}) + n - k \leqslant \dim X + n - k = \dim Y - k. \tag{2}$$

С другой стороны, рассмотрим отображение $\overline{X}^1$ на Y^*. По теореме Freudenthal'я

$$\dim Y_k^* \geqslant \dim Y^* - k + 1.$$

Следовательно, по лемме 1

$$\dim Y_k^* \geqslant \dim Y - k + 1. \tag{3}$$

При сопоставлении (1), (2) и (3) получается противоречие. Теорема III доказана.

Пример 1 показывает, что требование $(n+1)$-кратности отображения существенно.

В случае, когда пространство X удовлетворяет условию (α), а пространство Y размернооднородно, имеет место

ТЕОРЕМА IV. *Пусть пространство X удовлетворяет условию (α); если пространство Y размернооднородно, $\dim Y - \dim X = n$ и f есть $(n+2)$-кратное отображение X на Y, то мощность минимальных ядер принимает $(n+2)$ различные значения.*

ЛЕММА 3. *Если пространство X удовлетворяет условию (α) и A — множество типа F_σ в X, причем $\dim A = \dim X$, то A также удовлетворяет условию (α).*

Доказательство. Пусть B замкнутое, нигде не плотное в A множество. Так как A — множество типа F_σ, то и B есть F_σ в X. Пусть $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, где все F_n замкнуты в X. Так как B нигде не плотно в A и тем более в X, то и все множества F_n нигде не плотны в X. В силу того, что X удовлетворяет условию (α), для всех $n = 1, 2, \ldots$ имеем $\dim F_n < \dim X$. Следовательно, по теореме сложения $\dim B < < \dim X$ и так как $\dim A = \dim X$, то $\dim B < \dim A$.

Из леммы 3, в частности, следует, что если пространство X удовлетворяет условию (α), то и всякое его замкнутое или открытое множество той же размерности, что и X, удовлетворяет условию (α).

Как и раньше, рассматриваем $X^1 = f^{-1}(Y)$ и $\overline{X^1}$.

ЛЕММА 4. *В предположениях теоремы* IV *имеем:* 1° $f(\overline{X}^1) = Y$, 2° *отображение $\overline{X^1}$ на Y неприводимо.*

Доказательство. Утверждение 2° непосредственно следует из того, что в каждом открытом в $\overline{X}^1$ множестве U имеются точки кратности 1.

Докажем утверждение 1°. Пусть $f(\overline{X}^1) = Y^* \neq Y$. Тогда $Y \setminus Y^*$ — непустое открытое множество. Для множества $G = f^{-1}(Y \setminus Y^*)$ имеются две возможности:

1. $\dim G = \dim X$; следовательно G, как открытое множество той же размерности, что и X, удовлетворяет условию (α).

2. $\dim G = \dim X - 1$.

Так как $\dim (Y \setminus Y^*) = \dim Y$, то в обоих случаях для отображения G на $Y \setminus Y^*$ кратность $\mu(y)$ должно принимать $(n+2)$ различных значений. Но это не выполняется, так как в $Y \setminus Y^*$ не входят точки кратности 1.

ЛЕММА 5. *В предположениях теоремы* IV *единственным ядром произвольной точки $y \in Y$ при отображении X на Y является полный прообраз этой точки в пространстве $\overline{X}^1$ (при отображении $\overline{X}^1$ на Y).*

Доказательство. Обозначим через A полный прообраз точки y при отображении $\overline{X^1}$ на Y. Так как отображение $\overline{X^1}$ на Y неприводимо, то A является ядром точки y при этом отображении. Из того что $\overline{X^1}$ отображается на все пространство Y, следует, что множество A продолжает обладать свойством 1° (в определении ядра) и при отображении всего пространства X на Y. Всякое отличное от A подмножество $B \subset f^{-1}(y)$, обладающее свойством 1°, содержит A. Действительно, если бы B не содержало A, то нашлась бы точка $x \in A$, $x \overline{\in} B$, т. е. $x \in \overline{X^1}$ и множество $\{f^{-1}(y) \setminus x\}$ содержало бы ядро B. А это противоречит лемме 2.

Доказательство теоремы IV. Возможны два случая:

1° $\dim \overline{X^1} = \dim X$, тогда $\overline{X^1}$, как замкнутое подмножество пространства X той же размерности, что и X, удовлетворяет условию (α);

2° $\dim \overline{X^1} = \dim X - 1$.

В обоих случаях по теореме Hurewicz'а кратность $\mu(y)$ при отображении $\overline{X^1}$ на Y принимает $n+2$ различных значения. В силу леммы 5 и мощность минимальных ядер принимает $n+2$ различных значения.

Рассматривая доказательства лемм 4 и 5, без труда убеждаемся, что выполнены и следующие предложения:

ЛЕММА 4'. *Если при $(n+1)$-кратном отображении f пространства X на размерноoднородное пространство Y, $\dim Y$ $\dim X = n$, то 1° $f(\overline{X^1}) = Y$, 2° отображение $\overline{X^1}$ на Y неприводимо.*

ЛЕММА 5'. *В предположениях леммы 4' единственным ядром произвольной точки $y \in Y$ при отображении X на Y является полный прообраз этой точки в пространстве $\overline{X^1}$ (при отображении $\overline{X^1}$ на Y).*

Из лемм 4 и 4' следует, что если при $(n+1)$-кратном отображении пространства X [соответственно, при $(n+2)$-кратном отображении пространства X, удовлетворяющего условию (α)] на размерноoднородное пространство Y, имеем $\dim Y - \dim X = n$, то существует лишь одно замкнутое подмножество X, неприводимо отображающееся на Y, а именно $\overline{X^1}$. Действительно, во всякое замкнутое подмножество $X^* \subset X$, неприводимо отображающееся на Y, должно войти X^1 и, следовательно, $\overline{X^1}$, а $\overline{X^1}$ отображается неприводимо на Y.

Леммы 5 и 5' показывают, что при таком отображении каждая точка $y \in Y$ имеет лишь одно ядро — множество $f^{-1}(y) \cap \overline{X^1}$.

ТЕОРЕМА V. *Если при конечнократном отображении f пространства X на пространство Y, $\dim Y - \dim X = n$, то можно найти n точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$, отображающихся в одну и ту же точку $y = f(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, и открытое множество U, содержащее все точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ так, что y не является внутренней точкой множества $f(U)$.*

Замечание. Эта теорема представляет собою усиление теоремы П. С. Александрова, утверждающей, что при конечнократном открытом отображении размерность не повышается.

ЛЕММА 6. *Пусть дана сходящаяся последовательность точек* $y_m \in Y$, $\lim y_m = y$, $y \neq y_m$ *ни для одного* m. *Тогда верхний топологический предел* T *последовательности множеств* $f^{-1}(y_m)$ *не пуст и принадлежит* $f^{-1}(y)$.

Доказательство. В самом деле, если бы T было пусто, то сумма всех множеств $f^{-}(y_m)$, $m = 1, 2, \ldots$, была бы замкнутым множеством A, тогда как $f(A) = \{y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots\}$ незамкнуто, что противоречит замкнутости отображения. Что касается утверждения $T \subseteq f^{-1}(y)$, то оно следует из непрерывности отображения.

Доказательство теоремы V. Предположим, что теорема неверна. Это значит: Пусть y — произвольная точка пространства Y. Каковы бы ни были точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$, взятые в $f^{-1}(y)$, и каково бы ни было открытое множество U, содержащее эти точки, точка y есть внутренняя точка множества $f(U)$. Это предположение (которое будем называть *основным* предположением) надо привести к противоречию. Для этого прежде всего выведем из него следующее утверждение: *если* $X^k = f^{-1}(Y^k)$, *то* (при любом k) *каждая точка замыкания* $\overline{X^k}$ *имеет кратность не большую, чем* $k + n - 1$.

В самом деле, пусть $x_1 \mathring{\in} \overline{X^k}$. Полагаем $y = f(x_1)$ и предположим, что $\mu(y) \geqslant k + n$. Очевидно, $x_1 \in \overline{X^k}$. Рассмотрим последовательность x_1^m, $\lim x_1^m = x_1$, $x_1^m \in X_k$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Выберем ее так, чтобы $f(x_1^{m'}) \neq f(x_1^{m''})$, если $m' \neq m''$. Обозначим $f(x_1^m) = y^m$. Тогда $\lim y^m = y$. Если $k = 1$, то построение на этом кончается. Если же $k > 1$, то в каждом множестве $f^{-1}(y^m)$ выберем по точке x_2^m так, чтобы $x_2^m \neq x_1^m$ для любого m.

В силу леммы 6 множество всех точек $\{x_2^m\}$ имеет хотя бы одну предельную точку x_2, $f(x_2) = y$. Выберем подпоследовательность $x_2^{m_2}$, $\lim x_2^{m_2} = x_2$. Для последовательности $y^{m_2} = f(x_2^{m_2})$, $\lim y^{m_2} = y$. Если $k = 2$, то построение опять закончено. Если же $k > 2$, то в каждом множестве $f^{-1}(y^m)$ выберем по точке $x_3^{m_2}$, отличной от $x_2^{m_2}$ и $x_1^{m_2}$. Из множества всех точек $\{x_3^{m_2}\}$ выберем последовательность $x_3^{m_3}$, $\lim x_3^{m_3} = x_3$, $f(x_3^{m_3}) = y^{m_3}$, $f(x_3) = y$ и т. д. После k шагов получим k последовательностей:

$$x_1^m \to x_1, \quad x_2^{m_2} \to x_2, \ldots, x_k^{m_k} \to x_k, \quad f(x_1) = f(x_2) = \ldots = f(x_k) = y.$$

Заменим теперь m_k через m. Получим последовательности:

$$x_1^m \to x_1, \quad x_2^m \to x_2, \ \ldots, \ x_k^m \to x_k,$$

т. е. $x_i^m \to x_i$, для всех $i \leqslant k$, причем

$$f(x_1^m) = f(x_2^m) = \ \ldots \ = f(x_k^m) = y^m$$

для всех m и

$$f(x_1) = f(x_2) = \ \ldots \ = f(x_k) = y.$$

Среди точек $x_1, x_2, \ldots, x_k$ могут быть и совпадающие, но $x_i^m \neq x_j^m$, если $i \neq j$.

Так как все точки $x_i^m \in X^k$, то множество A'_m точек $\{x_1^m, x_2^m, \ldots, x_k^m\}$ при любом m является полным прообразом точки y^m.

Обозначим через A' множество, состоящее из всех точек $x_1, x_2, \ldots, x_k$, и положим $A = f^{-1}(y) \setminus A'$. В силу предположения $\mu(y) \geqslant k+n$ множество A содержит не менее, чем n точек. Выберем непересекающиеся окрестности U и U' множеств A и A'. В силу нашего основного предположения точка y будет внутренней точкой множества $f(U)$. Следовательно, существует такая окрестность $U'' \subset U'$ множества A', что $f(U'') \subset f(U)$. Таким образом, множество $X \setminus U''$ отображается на все Y. Но в U'' содержится при некотором m все множество A'_m, т. е. полный прообраз точки y_m. Получается противоречие, доказывающее формулу $\mu(y) \leqslant k+n-1$.

Теперь уже нетрудно привести к противоречию наше основное предположение и тем доказать теорему V.

Рассмотрим множество $X_k = f^{-1}(Y_k)$. На нем отображение остается замкнутым и непрерывным. В силу только что доказанного множество $\overline{X}^k$ и тем более относительное замыкание $\widetilde{X}^k$ множества X^k в X_k может содержать лишь точки кратности $\leqslant k+n-1$. Так как, с другой стороны, $\widetilde{X}^k \subseteq X_k$, то кратность любой точки множества $\widetilde{X}^k$ не меньше k; итак, кратность произвольной точки $\widetilde{X}^k$ равна одному из чисел: $k, k+1, \ldots, k+n-1$.

Пусть $\widetilde{Y}^k = f(\widetilde{X}^k)$. По теореме Hurewicz'a

$$\dim \widetilde{Y}^k \leqslant \dim \widetilde{X}^k + n - 1 \leqslant \dim X + n - 1.$$

Так как множество Y_k типа F_σ, то и множества X_k, $\widetilde{X}^k$ и $\widetilde{Y}^k$ также типа F_σ при любом k. Очевидно, $Y = \sum_k \widetilde{Y}^k$. По теореме сложения

$$\dim Y \leqslant \dim X + n - 1,$$

а это противоречит условиям теоремы V. Основное предположение этим опровергнуто и теорема V доказана.

Все работы, посвященные исследованию отображений, повышающих размерность, дают *необходимые* условия, выполняющиеся при такого рода отображениях. Никаких достаточных условий пока нет.

Приведем пример неприводимого двукратного отображения нульмерного компакта на нульмерный же компакт, при котором множество точек кратности 2 всюду плотно.

Пример 2. Пространство X есть канторово совершенное множество. Строим отображение пространства X в сегмент $[0, 1]$ следующим образом:

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1.$$

Концы смежного интервала 1-го ранга отображаются в одну точку $\frac{1}{2}$. Концы смежных интервалов 2-го ранга переходят в концы интервалов $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$ и $\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right)$, причем порядок точек на прямой сохраняется. Пусть отображение определено уже на всех концах смежных

интервалов рангов $\leqslant n-1$. Тогда на концах смежных интервалов ранга n отображение определяем так. Пусть (a, b) — произвольный смежный интервал ранга n и c (соответственно, d) — правый (соответственно, левый) конец соседнего с (a, b) слева (справа) смежного интервала меньшего ранга (возможны случаи $c=0$ или $d=1$). Пусть $f(c)=\alpha$, $f(d)=\beta$. Тогда полагаем

$$f(a)=f(b)=\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad \text{при } n \text{ нечетном}$$

$$f(a)=\frac{2\alpha+\beta}{3}, \quad f(b)=\frac{\alpha+2\beta}{3} \text{ при } n \text{ четном.}$$

Этим, по индукции, определено отображение на всех точках X первого рода. На точки второго рода отображение распространяется по непрерывности.

Очевидно, образом пространства X будет совершенное нигде не плотное множество, лежащее на отрезке $[0, 1]$, т. е. нульмерный компакт. Отображение непрерывно и неприводимо. Точками кратности 2 в пространстве X являются все концы смежных интервалов нечетных рангов, и они образуют всюду плотное множество.

Поступило
20. XII. 1943

ЛИТЕРАТУРА

[1] Hurewicz W., Über dimensionserhöhende stetige Abbildungen, Journ. für reine und angew. Mathematik, 169 (1932), 71—78.

[2] Freudenthal H., Über dimensionserhöhende stetige Abbildungen, Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss., V (1932), 34—38.

I. WEINSTEIN, J. KAJDAN. FINITE-MULTIPLE CONTINUOUS DIMENSION-RAISING MAPPINGS

SUMMARY

We investigate continuous closed mappings f of the space X *onto* the space Y. Both X and Y are supposed to be metric spaces possessing countable bases. We are interested in the mappings under which the dimension is increased, i. e. such that $\dim Y > \dim X$. By a kernel of a point $y \in Y$ we mean any set $A \subseteq f^{-1}(y)$ satisfying the following conditions:

1° The image of every neighbourhood $U(A)$ contains y as inner point.

2° There is no proper subset $A_0 \subset A$ satisfying the condition 1°.

It is easy to see that every point $y \in Y$ has at least one kernel for the given mapping. If the finite-multiple mapping is irreducible, then every point $y \in Y$ has a unique kernel, which is $f^{-1}(y)$ (a many one mapping is said to be finite-multiple if the power of any $f^{-1}(y)$—«the multiplicity of the point y under f»—is a finite number; it is irreducible if X contains no proper closed subset mapped onto the whole Y). It is easy to construct an example of a mapping raising the dimension by one, for which every minimal kernel (i. e. of minimal power) consists of a unique point.

If for a finite-multiple mapping f of the space X *onto* Y, $\dim Y - \dim X = n$, then, for any $k = 1, 2, \ldots, n+1$ there exists at least one point y of multiplicity k such that its unique kernel coincides with $f^{-1}(y)$. We note that if the space X satisfies the condition (α): every subset of X nowhere dense in X is of dimension less than $\dim X$, then the powers of the minimal kernels take on at least $n+2$ distinct values, whenever Y is dimensionally homogeneous, f is finite-multiple and $\dim Y - \dim X = n$.

Finally, we have the following theorem:

If f is a finite-multiple mapping of the space X onto the space Y and $\dim Y - \dim X = n$, then there exist n points $x_1, \ldots, x_n$ carried into one and the same point $y = f(x_1) = \ldots = f(x_n)$ and an open set U containing all $x_1, \ldots, x_n$ such that y is not an inner point of the set $f(U)$.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 8 (1944), 139—142 Série mathématique

А. И. ТИХОМИРОВ

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ О ПРОСТЫХ КОЛЬЦАХ

(*Представлено академиком* **О. Ю. Шмидтом**)

В работе новым методом доказывается простота прямого произведения простой и нормальной алгебры A над K и простой алгебры B, содержащей K в своем центре, без предположения об ассоциативности A и B.

В теории простых алгебр конечного ранга существенную роль играет теорема о простоте прямого произведения над полем K простой и нормальной над K алгебры A и простой алгебры B, содержащей K в своем центре—теорема, впервые доказанная E. Noether. Но затем, как показали А. Г. Курош (1) и независимо E. Artin и G. Whaples (2), оказалось, что теорема остается справедливой и для алгебр бесконечного ранга. При этом во второй из этих работ было найдено также строение двусторонних идеалов прямого произведения $A \times B$, где A и B удовлетворяют всем перечисленным условиям за исключением простоты B.

В настоящей заметке предлагается новое доказательство этой теоремы, найденное еще в 1941 г. при ознакомлении с работой (1) в рукописи и, повидимому, более простое, чем уже опубликованные доказательства, так как оно не нуждается в привлечении никаких новых понятий. Кроме того, оно не требует ассоциативности алгебр A и B. Последнее замечание принуждает нас дать сначала определение неассоциативной алгебры и прямого произведения неассоциативных алгебр для случая двух прямых множителей.

(Неассоциативной) а л г е б р о й называется двусторонне дистрибутивное кольцо A, линейное относительно некоторого поля K, причем имеют место следующие правила: если $\alpha, \beta \subset K$, $a, b \subset A$, то

$$\left.\begin{array}{c} a\alpha = \alpha a \subset A, \quad 1_K a = a, \quad \alpha(\beta a) = (\alpha\beta) a, \\ \alpha\,(a+b) = \alpha a + \alpha b, \quad (\alpha+\beta) a = \alpha a + \beta a, \\ \alpha(ab) = (\alpha a) b = a(b\alpha). \end{array}\right\} \qquad (1)$$

В алгебре A можно выбрать базу—множество линейно независимых над K элементов, через конечные суммы которых с коэффициентами из K выражаются все элементы A. Мощность этого множества—ранг алгебры—есть инвариант A. Если A содержит единицу, то, как обычно, можно считать, что $K \subset A$.

Пусть A и B — алгебры над полем K, вообще неассоциативные, и в них выбраны базы a_α и b_β, где α и β пробегают соответственно некоторые, может быть, бесконечные, множества индексов $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. За базу алгебры, которую обозначим $A \times B$ и назовем **прямым произведением** алгебр A и B, примем множество формальных произведений $a_\alpha b_\beta = b_\beta a_\alpha$ при всевозможных α и β, причем будем их считать линейно независимыми над K. Произведение двух элементов базы определяется как

$$a_\alpha b_\beta \cdot a_{\alpha'} b_{\beta'} = (a_\alpha a_{\alpha'})(b_\beta b_{\beta'}) = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} a_{\alpha_\mu} b_{\beta_\nu} \gamma_{\mu\nu}, \quad \gamma_{\mu\nu} \subset K, \tag{2}$$

если произвести перемножение $a_\alpha a_{\alpha'}$ и $b_\beta b_{\beta'}$ по правилам алгебр A и B. Умножение в $A \times B$ считается дистрибутивным и подчиняющимся правилам (1).

Если $a = \sum_{\mu,\nu} a_\mu b_\nu \alpha_{\mu\nu} \subset A \times B$, то, объединяя слагаемые с одним и тем же a_μ, элемент a можно представить так же, как $a = \sum_\mu a_\mu b^\mu$, $b^\mu \subset B$, и притом *единственным* образом. Действительно, это равносильно утверждению, что из $\sum_\mu a_\mu b^\mu = 0$ следует $b^\mu = 0$; выражая b^μ через b_β, получим $\sum_{\mu,\nu} a_\mu b_\nu \alpha_{\mu\nu} = 0$, откуда в силу линейной независимости все $\alpha_{\mu\nu} = 0$, $b^\mu = 0$. Представление $a = \sum_\mu a_\mu b^\mu \subset A \times B$ показывает, что $A \times B$ не зависит от выбора базы в B и, в силу симметрии, в A. Если A и B обладают соответственно единицами 1_A и 1_B, то элемент $1_A 1_B$ служит единицей в $A \times B$.

При сделанных определениях имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. *Пусть A и B вообще неассоциативные алгебры над полем K, причем K есть центр A и содержится в центре B; тогда всякий двусторонний идеал алгебры $A \times B$ над K имеет вид $A \times \mathfrak{b}$ над K, где $\mathfrak{b}$ — двусторонний идеал алгебры B.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что из (1) следует: $1_K = 1_A = 1_B$. Пусть, далее, D — двусторонний идеал алгебры $A \times B$, d — элемент D, отличный от нуля и обладающий кратчайшей записью вида

$$d = \sum_{i=1}^{n} b_i a^i; \tag{3}$$

$a^i \subset A$, b_i — некоторые элементы заданной базы b_β алгебры B. Если в равенстве

$$1_A = \sum_{\alpha=1}^{m} (\cdots (a'_{\alpha_2}(a^1 a'_{\alpha_1})) \cdots) a'_{\alpha h_\alpha}$$

(где в каждом слагаемом своя расстановка скобок), существующем в силу простоты A, вместо $a'_{\alpha_i} \subset A$ подставить $a'_{\alpha_i} 1_B$, вместо a^1 элемент d, то получим элемент $d' \subset D$:

$$d' = \sum_{\alpha=1}^{m} [\cdots [(a'_{\alpha_2} 1_B) [d (a'_{\alpha_1} 1_B)]] \cdots] (a_{\alpha k_\alpha} 1_B),$$

который в силу равенства (3), закона дистрибутивности и (2) равен

$$d' = b_1 1_A + b_2 1_A k_2 + \ldots + b_n 1_A k_n \neq 0,$$

где $k_2, \ldots, k_n$ (при $n > 1$) принадлежат K. Действительно, если бы, например, $k_2 \not\subset K$, то в силу нормальности A существовал бы такой элемент $a \subset A$, что $ak_2 \neq k_2 a$, а тогда $(a 1_B) d - d (a 1_B) = b_2 a^{(2)} + \ldots + b_n a^{(n)} \neq 0$ принадлежал бы к D и обладал более короткой записью, чем d. Следовательно, $d' = b 1_A \subset D$, $b \subset B$. Соберем все элементы из D этого вида; все их первые множители, очевидно, образуют двусторонний идеал $\mathfrak{b}$ алгебры B, и $A \times \mathfrak{b} \subseteq D$. Покажем, что $A \times \mathfrak{b} = D$. Пусть b'_β, $\beta \subset \mathfrak{N}$, новая база B, выбранная таким образом, что $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}' + \mathfrak{N}''$ и $b'_{\beta'}$ при $\beta' \subset \mathfrak{N}'$ образуют базу $\mathfrak{b}$. Пусть, наоборот, $A \times \mathfrak{b} \neq D$, $d \subset D$, $d \not\subset A \times \mathfrak{b}$, и элемент d обладает наиболее короткой записью через элементы новой базы b'_β. В эту запись

$$d = \sum_{i=1}^{r} b'_{\beta''_i} a^i \quad (r > 1, \text{ так как при } r = 1,\ d \subset A \times \mathfrak{b}),$$

очевидно, не входят элементы $b'_{\beta'}$, так как эти слагаемые мы имеем право удалить. Поступая с этим элементом d так же, как с прежним, получим $d' = b'_{\beta''_1} 1_A + b'_{\beta''_2} 1_A k_2 + \ldots + b'_{\beta''_r} 1_A k_r \subset D$, где $k_2, \ldots, k_r$ в силу тех же причин принадлежат K, и $d' = b' 1_A$, где $b' = b_{\beta''_1} + b'_{\beta''_2} k_2 + \ldots + b'_{\beta''_r} k_r \neq 0$, но тогда согласно определению идеала $\mathfrak{b}$, $b' \subset \mathfrak{b}$, что невозможно, так как $b'_{\beta'}$ и $b'_{\beta''}$ линейно независимы. Таким образом, $D = A \times \mathfrak{b}$ и теорема доказана.

Известно*, что если центр простого кольца отличен от нуля и в кольце закон ассоциативности справедлив для любых трех элементов, хотя бы один из них принадлежал к центру, то этот центр есть поле и его единица служит единицей для всего кольца. Это приводит к следующему следствию из доказанной выше теоремы.

ТЕОРЕМА 2. *Если A и B (вообще неассоциативные) простые кольца, причем центр K кольца A отличен от нуля, а центр кольца B содержит K и $1_K = 1_B$, и если в кольцах A и B закон ассоциативности справедлив для всяких трех элементов, хотя бы один из них входил в K, то A и B будут алгебрами над K и прямое произведение $A \times B$ над K само есть простое кольцо.*

Поступило
23. X. 1943

ЛИТЕРАТУРА

[1] Kurosh A., Direct decompositions of simple rings, Мат. сб., 11 (53): 3 (1942), 245—263.

[2] Artin E. and Whaples G., The theory of simple rings, Amer. Journ. of Math., 65 (1943), 87—107.

* См. ([1]), теорема 1; доказательство на наш более общий случай переносится без изменений.

A. TIHOMIROV. A NEW PROOF OF A THEOREM CONCERNING SIMPLE RINGS

SUMMARY

The theorem stating the simplicity of the direct product (over a field K) of a simple normal (over K) algebra A and a simple algebra, the centrum of which contains K, plays an important rôle in the theory of simple algebras of finite rank. This theorem was first proved by E. Noether. As was afterwards shown by A. Kurosh (1) and, independently, by E. Artin and G. Whaples (2), the theorem holds for the algebras of infinite rank as well.

In the present note we give a new proof of this theorem obtained in the year 1941 at the study of the paper (1) in manuscript. This proof seems to be simpler than that now published, because it does not require any new notion.

THEOREM 1. *Let A and B be algebras, in general non-commutative, over a field K. We suppose that K is the centrum of A and is contained in the centrum of B. Then every two-sided ideal of the algebra $A\times B$ over K is of form $A\times\mathfrak{b}$ where $\mathfrak{b}$ is a two-sided ideal of the algebra B.*

Hence follows

THEOREM 2. *Let A and B be simple rings, non-commutative in general. If the centrum of the ring A is different from zero, the centrum of B contains K so that $1_K=1_B$ and any three elements of A or of B, at least one of which belongs to K, follow the associativity law, then both A and B are algebras over K and the direct product $A\times B$ over K is a simple ring.*

We briefly outline the proof of theorem 2 for the associative case. Let D be an ideal of the algebra $A\times B$ and $d=\sum_{i=1}^{n} b_i a^i \neq 0$ an element of D corresponding to the minimal value of n, for the given basis b_β of B. Since A is simple, there is a relation $\sum_{j=1}^{r}{}' a_j' a^1 a_j'' = 1_A$, $a_j', a_j'' \subset A$, whence $d^1=\sum_{j=1}^{r} a_j' \cdot 1_B \cdot d \cdot a_j'' \cdot 1 = b_1 1_A + b_2 a'^2 + \ldots + b_n a'^n \neq 0$ is an element of D. If, for instance, $a'^2 \not\subset K$, then, A being normal, an element $a' \subset A$ would exist such that $a'a'^2 - a'^2 a' = a'' \neq 0$ and, therefore, the element $d' \cdot a \cdot 1_B - a' \cdot 1_B \cdot d' = b_2 a'' + \ldots + b_n a^{(n)} \neq 0$ would also belong to D, which contradicts to the hypothesis that n is minimal. Hence $d' = b \cdot 1_A \subset D$; since B is simple, $1_A 1_B \subset D$ and $D = A\times B$.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 8 (1944), 129—160 Série mathématique

А. И. МАЛЬЦЕВ

О ПОЛУПРОСТЫХ ПОДГРУППАХ ГРУПП ЛИ

(*Представлено академиком* И. М. Виноградовым)

В статье показывается, что к задаче перечисления полупростых подгрупп простых групп Ли приводится более общая задача определения полупростых подгрупп произвольных групп Ли и задача о нахождении всех групп с данным радикалом. Далее определяются ортогональные и симплектические представления полупростых групп Ли и находятся полупростые подгруппы классических групп. Отдельно вычисляются полупростые подгруппы особых групп G_2 и F_4.

Целью настоящей работы является решение задачи о нахождении всех классов сопряженных полупростых подгрупп полупростых групп Ли*. Эта задача, далее называемая для краткости основной задачей, сводится к перечислению полупростых подгрупп простых групп и решается в § 2—3 для всех простых групп, кроме трех особых групп E_6, E_7, E_8.

В § 1 рассматривается более общая задача об изучении свойств полупростых подгрупп произвольных групп Ли. Здесь прежде всего показывается, что все максимальные полупростые подгруппы произвольной неполупростой группы Ли сопряжены между собой. Отсюда, далее, выводится, что классов сопряженных полупростых подгрупп в неполупростой группе $\mathfrak{G}$ в точности столько, сколько их имеется в максимальной полупростой подгруппе $\mathfrak{G}$. Таким образом, задача о перечислении полупростых подгрупп произвольных групп Ли оказывается эквивалентной своему частному случаю, сформулированному выше под именем основной задачи.

В заключение § 1 показывается, что проблема построения групп Ли с данным радикалом также сводится к упомянутой основной задаче. Этот результат, повидимому, имеет и самостоятельный интерес. Действительно, в силу теоремы E. Levi фундаментальная проблема классифика-

---

* Здесь и в дальнейшем группами Ли называются комплексные связные группы и, соответственно, алгебрами Ли — алгебры над полем комплексных чисел. Как правило, группы будут обозначаться готическими, а их алгебры — латинскими буквами.

ции групп Ли распадается на 3 части: 1) классификация полупростых групп, 2) классификация разрешимых групп и 3) классификация групп с заданным радикалом и заданной фактор-группой по нему. Теорема Levi хотя и является основной для решения последней проблемы, однако сама по себе ее еще не решает *. Упомянутое нами сведение этой задачи к основной задаче интересно в том отношении, что показывает, что ее решение зависит от решения вопросов, касающихся только теории полупростых групп. Говоря не вполне точно, групп с данным радикалом существует столько, сколько классов сопряженных полупростых подгрупп имеет максимальная полупростая группа автоморфизмов радикала. Принимая во внимание результаты § 2—3, отсюда следует, например, что неизоморфных групп с данным радикалом и данной фактор-группой по нему существует только конечное число.

К той же основной задаче приводятся и некоторые другие важные вопросы теории групп Ли. Так, В. В. Морозовым было показано, что классическая задача о нахождении примитивных групп Ли приводится к определению максимальных подгрупп полупростых групп ([8]). С другой стороны, все неполупростые максимальные подгруппы им определены ([9]). Таким образом, остается отыскать только полупростые максимальные подгруппы, что уже связано с нашей основной задачей.

Наконец, к основной задаче приводится и задача отыскания компактных подгрупп групп Ли. Действительно, всякая компактная группа Ли есть прямое произведение полупростой и абелевой групп. Поэтому ясно, что задача определения компактных подгрупп вещественной группы Ли тесно связана с нахождением ее комплексных полупростых подгрупп. В другом месте нами показано, что обе задачи в точности эквивалентны ([10]). Можно отметить, что геометрически нахождение подгрупп компактных групп даст перечисление однородных топологических многообразий с компактной транзитивной группой преобразований.

Таким образом, основная задача о перечислении полупростых подгрупп полупростых групп представляется имеющей большой интерес как сама по себе, так и по своим связям с различными другими вопросами. Решению ее посвящены § 2—3 настоящей статьи. В вводной части устанавливается зависимость этой задачи от теории представлений и показывается, что общая задача нахождения полупростых подгрупп в полупростых группах распадается на отдельные задачи определения полупростых подгрупп в простых группах Ли. Далее в § 2 дается решение этой задачи для четырех бесконечных серий классических групп $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{C}_n$, $\mathfrak{D}_n$. Решение ее для особых групп G_2, F_4 содержится в § 3. Что касается полупростых подгрупп остающихся трех простых групп E_6, E_7, E_8, то они нами не определены и, таким образом, полученное решение основной задачи остается неполным.

Основным результатом § 3 является теорема о том, что всякие две трехчленные простые подгруппы $\{e, f, e^*\}$ и $\{e_1, f, e_1^*\}$ с общим

* Ср. Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, Москва, 1938, стр. 287.

элементом f являются сопряженными в любой полупростой группе, их содержащей *. Пользуясь этим, можно дать перечисление всех полупростых подгрупп G_2, F_4 в совершенно явной форме, что в § 3 и выполнено.

Несколько более сложно обстоит дело в § 2. Здесь основным средством является теория представлений Картана-Вейля. Чтобы яснее представить результат, рассмотрим, например, серию $\mathfrak{C}_n$ симплектических групп. Пусть $\mathfrak{G}$—заданная полупростая группа и требуется перечислить с точностью до сопряженности все изоморфные $\mathfrak{G}$ подгруппы какой-либо группы $\mathfrak{C}_p$. Если $\mathfrak{H}$—одна из таких групп, то изоморфизм $\mathfrak{G} \to \mathfrak{H}$ является представлением $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{C}_p$, т. е. симплектическим представлением группы $\mathfrak{G}$ степени $2p$. Можно показать, что, обратно, всякое симплектическое представление $\mathfrak{G}$ степени $2p$ однозначно определяет некоторую подгруппу $\mathfrak{C}_p$ и что эквивалентные представления дают, вообще говоря, сопряженные подгруппы. Но в теории Картана ([2]) каждое линейное представление однозначно определяется некоторой линейной формой Λ, называемой весом представления, и для каждой полупростой группы $\mathfrak{G}$ все веса Картаном перечислены **. Следовательно, для решения нашей задачи нужно из полной серии картановских весов Λ_1, $\Lambda_2, \ldots$ группы $\mathfrak{G}$ выбрать те, которые отвечают симплектическим представлениям $\mathfrak{G}$. Такая выборка и производится в § 2 как для симплектических, так и для ортогональных представлений. Пусть теперь мы знаем веса Λ_{n_1}, $\Lambda_{n_2}, \ldots$ симплектических представлений $\mathfrak{G}$. Согласно сказанному, это дает нам право утверждать, что мы знаем все изоморфные $\mathfrak{G}$ подгруппы сразу всех простых групп серии $\mathfrak{C}_n$. Чтобы получить отсюда изоморфные $\mathfrak{G}$ подгруппы какой-нибудь индивидуальной группы $\mathfrak{C}_p$, нужно по формулам Weyl'я ([11]) вычислить степени представлений Λ_{n_i} и выбрать из них те, степени которых равны $2p$.

В заключение отметим, что отдельные частные случаи основной задачи рассматривались и ранее. Так, Ф. Р. Гантмахер ([7]) перечисляет все трехчленные подгруппы классических групп. Вспомогательным средством здесь также служит теория представлений, и само перечисление заключается в том, что указываются симплектические и ортогональные представления трехчленной простой группы. Относительно общей задачи им отмечено, что возможно только найти так называемые семирегулярные полупростые подгруппы простых групп.

§ 1. Максимальные полупростые подалгебры алгебр Ли

n° 1. Единственность разложения Levi. В теории групп Ли большую роль играет теорема E. Levi, согласно которой во всякой алгебре Ли G с радикалом R существует полупростая подалгебра, изо-

---

* Здесь e, f, e^*—канонический базис, связанный соотношениями $[fe] = e$, $[fe^*] = -e^*$, $[ee^*] = f$ и аналогичными для e_1, f, e_1^*.

** Если представление приводимо, то вместо одной линейной формы нужно взять систему форм, которую, очевидно, можно снова заменить линейной формой от большего числа переменных.

морфная алгебре вычетов G/R. Обозначив эту подалгебру через L, мы получим для G разложение $G=L+R$, $L\cap R=0$. Пусть $\mathfrak{G}$ связная, односвязная группа Ли с алгеброй G. Подалгебрам L и R в $\mathfrak{G}$ отвечают замкнутые связные подгруппы $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{R}$, и теорема Levi дает представление $\mathfrak{G}$ в виде полупрямого произведения $\mathfrak{G}=\mathfrak{L}\mathfrak{R}$, $\mathfrak{L}\cap\mathfrak{R}=\{e\}$. Естественно возникает вопрос, насколько такое разложение однозначно. Абсолютно однозначным оно может быть только в тривиальном случае, когда $\mathfrak{G}$ распадается в прямое произведение $\mathfrak{L}\times\mathfrak{R}$. Следовательно, речь может итти только об однозначности с точностью до внутренних автоморфизмов, и такая однозначность действительно имеет место.

ТЕОРЕМА 1. *Если $\mathfrak{G}=\mathfrak{L}\mathfrak{R}=\mathfrak{L}^*\mathfrak{R}$ — два представления связной группы Ли в виде произведения своего радикала и полупростой подгруппы, то $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}^*$ сопряжены в $\mathfrak{G}$.*

Доказательство. Для групп размерности 1 теорема тривиальна. Предположим теперь, что теорема доказана для всех групп, имеющих меньшую размерность, чем данная. Если радикал $\mathfrak{R}$ содержит нетривиальный связный нормальный делитель $\mathfrak{S}$ группы $\mathfrak{G}$, отличный от $\mathfrak{R}$, то для фактор-группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{S}=\overline{\mathfrak{G}}$ мы будем иметь два разложения $\overline{\mathfrak{G}}=\overline{\mathfrak{L}}\overline{\mathfrak{R}}=\overline{\mathfrak{L}}^*\overline{\mathfrak{R}}$, где $\overline{\mathfrak{L}}, \overline{\mathfrak{L}}^*, \overline{\mathfrak{R}}$ — образы соответственных подгрупп при гомоморфизме $\mathfrak{G}\to\overline{\mathfrak{G}}$. Так как размерность $\overline{\mathfrak{G}}$ меньше размерности $\mathfrak{G}$, то в $\overline{\mathfrak{G}}$ найдется такой элемент $\bar{x}$, что $\overline{\mathfrak{L}}^*=\bar{x}^{-1}\overline{\mathfrak{L}}\bar{x}$. Следовательно, $\mathfrak{L}^*\subset x^{-1}\mathfrak{L}x\cdot\mathfrak{S}$. Обозначим $x^{-1}\mathfrak{L}x$ через $\mathfrak{L}^{**}$ и заметим, что группа $\mathfrak{L}^*\cdot\mathfrak{S}=\mathfrak{L}^{**}\cdot\mathfrak{S}$ допускает снова два разложения Levi. Так как ее размерность меньше размерности $\mathfrak{G}$, то в ней должен найтись элемент, переводящий $\mathfrak{L}^*$ в $\mathfrak{L}^{**}$, что и требовалось.

Рассмотрим теперь случай, когда радикал $\mathfrak{R}$ не содержит нормальных делителей $\mathfrak{G}$ и, значит, коммутативен. Перейдем к алгебрам Ли. Имеем $G=L+R=L^*+R$, $[RR]=0$ и R не содержит идеалов алгебры G. Пусть $e_1, \ldots, e_r$ — базис L, $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ — базис R, $[e_\alpha e_\beta]=c^\lambda_{\alpha\beta}e_\lambda$, $[e_\alpha \eta_i]=h^m_{\alpha i}\eta_m$. Так как $L\equiv L^*\ (\mathrm{mod}\ R)$, то в L^* найдется базис, образованный элементами $e^*_\alpha=e_\alpha+v^i_\alpha\eta_i$ $(\alpha=1,2,\ldots,r)$. Вводя обозначения $h_\alpha=\|h^m_{\alpha i}\|$, $v_\alpha=(v^1_\alpha, v^2_\alpha, \ldots, v^n_\alpha)$ и принимая во внимание, что $[e^*_\alpha e^*_\beta]=c^\lambda_{\alpha\beta}e^*_\lambda$, мы получим*

$$h_\alpha v_\beta - h_\beta v_\alpha = c^\lambda_{\alpha\beta}v_\lambda. \tag{1}$$

Линейное преобразование T пространства G, определяемое соотношениями

$$Te_\alpha = e_\alpha + v^i_\alpha\eta_i, \quad T\eta_i=\eta_i \tag{2}$$

есть, очевидно, автоморфизм алгебры G, переводящий L в L^*. Остается

---

* По дважды встречающимся индексам ведется суммирование. Опускание и поднятие индексов осуществляется с помощью основного тензора $C_{\alpha\beta}=c^\lambda_{\alpha\mu}c^\mu_{\lambda\beta}$. В частности, $h^\alpha=c^{\alpha\lambda}h_\lambda$, $c^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\gamma}=c^\alpha_{\lambda\gamma}c^{\lambda\beta}$. Тождество $[[e_\alpha e_\beta]\eta]=[e_\alpha[e_\beta\eta]]-[e_\beta[e_\alpha\eta]]$ дает $h_\alpha h_\beta - h_\beta h_\alpha = c^\lambda_{\alpha\beta}h_\lambda$. Таким образом соответствие $e_\alpha\to h_\alpha$ есть линейное представление алгебры L. Отсутствие идеалов G в R означает неприводимость этого представления.

показать, что он внутренний, т. е. что найдется такой элемент $t = t^i \eta_i$, что для матрицы A, определяемой соотношением $Ax = [tx]$ $(x \in G)$, будет выполняться условие $T = \exp A$. Так как $A^2 = 0$, то $\exp A = E + A$ (E — единичная матрица) и отсюда, принимая во внимание (2), получим $h_\alpha t = v_\alpha$, где t — искомый вектор $(t^1, t^2, \ldots, t^n)$. Из соотношения (1) имеем

$$h^\alpha h_\beta v_\alpha = h^\alpha h_\alpha v_\beta - c^{\lambda}_{\cdot\cdot\alpha\beta} h^\alpha v_\lambda.$$

Замечая, что

$$h^\alpha h_\beta = h_\beta h^\alpha + c^{\lambda\alpha}_{\cdot\cdot\beta} h_\lambda; \qquad c^{\lambda}_{\mu\beta} h^\mu = c^{\lambda\mu}_{\cdot\cdot\beta} h_\mu,$$

и вводя обозначения $h^\alpha h_\alpha = \nabla$, $v = h^\alpha v_\alpha$, мы приходим к равенству $h_\beta v = \nabla v$. Так как отображение $e_\alpha \to h_\alpha$ является неприводимым представлением алгебры L и $\nabla h_\alpha = h_\alpha \nabla$, то либо существует ∇^{-1}, либо $\nabla = 0$. Если представление не нулевое, то $\nabla \neq 0$ и $t = \nabla^{-1} v$ будет искомым решением уравнений $h_\alpha t = v_\alpha$. Если же все $h_\alpha = 0$, то соотношения (1) обращаются в $c^{\lambda}_{\alpha\beta} v_\lambda = 0$, откуда следует, что $v_\alpha = 0$ и $L = L^*$ *.

Теорему 1 можно сформулировать также в следующей несколько более общей форме.

ТЕОРЕМА 1а. *Пусть $\mathfrak{R}$—радикал группы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G} = \mathfrak{L} \cdot \mathfrak{R}$ какое-либо ее разложение Levi. Тогда всякая полупростая подгруппа $\mathfrak{L}^* \subset \mathfrak{G}$ сопряжена с некоторой подгруппой из $\mathfrak{L}$.*

Действительно, всякий элемент $l^* \in \mathfrak{L}^*$ однозначно представляется в виде произведения $l^* = lr$ $(l \in \mathfrak{L}, r \in \mathfrak{R})$. Совокупность всех l, участвующих в таких разложениях, является полупростой связной подгруппой $\mathfrak{L}^{**} \subset \mathfrak{L}$. Так как $\mathfrak{L}^{**} \cdot \mathfrak{R} = \mathfrak{L}^* \cdot \mathfrak{R}$, то найдется элемент $t \in \mathfrak{R}$, дающий $t^{-1} \mathfrak{L}^* t = \mathfrak{L}^{**}$, что и требовалось.

Одной из важных теорем теории полупростых групп является теорема о полной приводимости их линейных представлений. Эта теорема была доказана H. Weyl'ем с помощью интегрирований по группе. Позже были даны и алгебраические доказательства ее [например ([4])]. Мы покажем сейчас, что эта теорема является непосредственным следствием теоремы 1.

ТЕОРЕМА. *Все линейные представления полупростой группы распадаются на неприводимые части.*

В самом деле, пусть $\mathfrak{L}$—матричная полупростая алгебра. Приведем все ее матрицы к виду

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ * & A_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & * & \ldots & A_n \end{pmatrix},$$

где $\{A_i\}$ уже неприводимые системы. Пусть далее

---

* Действительно, $0 = -c^{\lambda\alpha}_{\cdot\cdot\beta} v_\lambda = c_{\lambda\beta} v^\lambda = v_\beta$. Простое доказательство неравенства $\nabla \neq 0$ содержится в ([13]), откуда также заимствуются и обозначения этого n°.

$$A^* = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A \end{pmatrix}.$$

и пусть R — совокупность всевозможных треугольных матриц, у которых места квадратов $A_1, \dots, A_n$ заняты нулями. Отображение $A \to A^*$ является изоморфным отображением алгебры L на полупростую алгебру $L^* = \{A^*\}$. Сумма $L + R = L^* + R$ есть алгебра Ли, радикалом которой служит R, а L и L^* являются ее максимальными полупростыми подалгебрами. По теореме 1 в R найдется такая матрица S, что $S^{-1}LS = L^*$, что и требовалось.

n° 2. Сопряженность полупростых подгрупп. Во многих вопросах важно знать полупростые подгруппы некоторой группы Ли. Все эти подгруппы распадаются на классы сопряженных, и дело идет о перечислении этих классов. Нижеследующая теорема показывает, что изучение полупростых подгрупп произвольной группы Ли и изучение полупростых подгрупп ее максимальной полупростой подгруппы — задачи вполне эквивалентные.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\mathfrak{L}$ — максимальная связная полупростая подгруппа связной односвязной группы Ли $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ — две полупростые подгруппы из $\mathfrak{L}$. Если $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ сопряжены в $\mathfrak{G}$, то они сопряжены и в $\mathfrak{L}$. Если существует внешний автоморфизм группы $\mathfrak{G}$, переводящий $\mathfrak{P}$ в $\mathfrak{Q}$, то существует также автоморфизм $\mathfrak{G}$, переводящий $\mathfrak{P}$ в $\mathfrak{Q}$ и оставляющий $\mathfrak{L}$ на месте.*

В самом деле, возьмем разложение Levi $\mathfrak{G} = \mathfrak{L} \cdot \mathfrak{R}$. Нам дано, что $g^{-1}\mathfrak{P}g = \mathfrak{Q}$. Пусть $g^{-1}pg = q$ $(p \in \mathfrak{P}, q \in \mathfrak{Q})$ и $g = lr$. Из $r^{-1}l^{-1}plr = q$, $l^{-1}pl \cdot r = q \cdot q^{-1}rq$ следует $l^{-1}pl = q$. Таким образом, $l^{-1}\mathfrak{P}l = \mathfrak{Q}$; что и требуется. Второе утверждение доказывается аналогичным путем. Пусть θ — автоморфизм $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{P}^\theta = \mathfrak{Q}$. Так как $\mathfrak{R}$ — характеристическая подгруппа, то $\mathfrak{R}^\theta = \mathfrak{R}$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{L}^\theta \cdot \mathfrak{R}$, $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{L}^\theta$. Но теорема 1 дает $r\mathfrak{L}^\theta r^{-1} = \mathfrak{L}$. Соотношение $r\mathfrak{P}^\theta r^{-1} = r\mathfrak{Q}r^{-1} \subset \mathfrak{L}$ показывает, что $r^{-1}qr = l$, $r^{-1} \cdot qrq^{-1} = lq^{-1}$. Так как левая часть содержится в $\mathfrak{R}$, а правая в $\mathfrak{L}$, то $q = l$, $r\mathfrak{Q}r^{-1} = \mathfrak{Q}$, $r\mathfrak{P}^\theta r^{-1} = \mathfrak{Q}$. Значит, θr^{-1} — искомый автоморфизм группы $\mathfrak{G}$. Иногда важно знать не только классы внутренне сопряженных, но и более широкие классы подгрупп, сопряженных относительно некоторой группы автоморфизмов $A(\mathfrak{G})$, содержащей также и внешние автоморфизмы $\mathfrak{G}$. Вторая часть теоремы 2 показывает, что в этом случае можно найти такую группу автоморфизмов $A(\mathfrak{L})$ группы $\mathfrak{L}$, что нахождение полупростых подгрупп $\mathfrak{G}$, сопряженных относительно $A(\mathfrak{G})$, и нахождение полупростых подгрупп $\mathfrak{L}$, сопряженных относительно $A(\mathfrak{L})$, будут равносильными задачами. Но группа всех автоморфизмов полупростой группы $\mathfrak{L}$ имеет конечный индекс относительно внутренних автоморфизмов $A_0(\mathfrak{L})$ и канонические формы внешних автоморфизмов известны [ср. ([3]), ([6])]. Поэтому задача нахождения классов полупростых подгрупп $\mathfrak{L}$, сопряженных относительно какой-нибудь группы автоморфизмов $A(\mathfrak{L}) \supset A_0(\mathfrak{L})$, в сущности эквивалентна нахождению классов внутренне сопряженных подгрупп.

n° 3. Группы с данным радикалом. Теоремы 1, 2 вместе с теоремой Levi оказываются достаточными, чтобы решить один из вопросов, относящихся к классификации алгебр Ли. Пусть $\mathfrak{R}$—некоторая данная разрешимая группа Ли, которую мы будем предполагать связной и односвязной. Требуется указать с точностью до изоморфизма все группы Ли $\mathfrak{G}$, имеющие $\mathfrak{R}$ своим радикалом.

Прежде всего мы можем исключить из рассмотрения тривиальный случай, когда $\mathfrak{G}$ содержит полупростой нормальный делитель $\mathfrak{P}$. Действительно, в этом случае $\mathfrak{G}$ разлагается в прямое произведение $\mathfrak{P}$ и некоторой группы $\mathfrak{H}$ с тем же радикалом [см. ([1])]. Обратно, прямое произведение группы $\mathfrak{H}$ с радикалом $\mathfrak{R}$ на произвольную полупростую группу дает, очевидно, группу с радикалом $\mathfrak{R}$. Группы, не имеющие полупростых нормальных делителей, назовем неразложимыми, и тогда общая задача редуцируется к такой: найти все неразложимые группы с данным радикалом.

Пусть R—алгебра Ли группы $\mathfrak{R}$. Группа $\mathfrak{S}$ всех автоморфизмов $\mathfrak{R}$ совпадает с группой автоморфизмов алгебры R. Но автоморфизмы R суть матрицы, элементы которых удовлетворяют определенной конечной системе алгебраических уравнений и, таким образом, $\mathfrak{S}$ может быть рассматриваема как вполне известная. Обозначим через $\mathfrak{L}$ какую-либо максимальную связную полупростую подгруппу $\mathfrak{S}$. Так как $\mathfrak{S}$ линейна, то $\mathfrak{L}$ замкнута и все ее полупростые подгруппы также замкнуты. Группу внутренних автоморфизмов $\mathfrak{S}$, оставляющих на месте $\mathfrak{L}$, обозначим $A(\mathfrak{S})$. Каждый автоморфизм из $A(\mathfrak{S})$ индуцирует некоторый автоморфизм группы $\mathfrak{L}$. Совокупность таких индуцированных автоморфизмов обозначим через $A(\mathfrak{L})$. Ясно, что $A(\mathfrak{L})$ содержит все внутренние автоморфизмы $\mathfrak{L}$.

Составим полупрямое произведение $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \cdot \mathfrak{R}$ группы $\mathfrak{R}$ на ее группу автоморфизмов $\mathfrak{L}$. Очевидно, $\mathfrak{F}$ является одной из групп, имеющих своим радикалом $\mathfrak{R}$. Подгруппы $\mathfrak{F}$ вида $\mathfrak{L}_1 \cdot \mathfrak{R}$, где $\mathfrak{L}_1$ какая-либо полупростая подгруппа $\mathfrak{L}$, будут снова группами с радикалом $\mathfrak{R}$. Мы покажем, что эти подгруппы исчерпывают неразложимые группы с радикалом $\mathfrak{R}$.

ТЕОРЕМА 3. *Всякая неразложимая группа Ли с радикалом $\mathfrak{R}$ локально изоморфна одной из групп вида $\mathfrak{L}_1 \cdot \mathfrak{R}$, где $\mathfrak{L}_1$—полупростая подгруппа $\mathfrak{L}$. Две подгруппы $\mathfrak{L}_1 \cdot \mathfrak{R}$ и $\mathfrak{L}_2 \cdot \mathfrak{R}$ изоморфны тогда и только тогда, когда $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ сопряжены в группе $A(\mathfrak{L})$.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{\mathfrak{G}}$—односвязная неразложимая группа с радикалом $\mathfrak{R}$. Обозначим через $\widetilde{\mathfrak{L}}$ ее максимальную полупростую подгруппу. $\widetilde{\mathfrak{L}}$ замкнута и $\widetilde{\mathfrak{G}} = \widetilde{\mathfrak{L}} \cdot \mathfrak{R}$, $\widetilde{\mathfrak{L}} \cap \mathfrak{R} = \{e\}$. Элементы $\widetilde{\mathfrak{L}}$, перестановочные со всеми элементами $\mathfrak{R}$, образуют нормальный делитель $N \subset \widetilde{\mathfrak{L}}$. Связная компонента единицы N является полупростым нормальным делителем $\widetilde{\mathfrak{G}}$ и, в силу предположенной неразложимости $\widetilde{\mathfrak{G}}$, должна быть единицей. Таким образом N дискретна и фактор-группа $\mathfrak{G} = \widetilde{\mathfrak{G}}/N = \widetilde{\mathfrak{L}}/N \cdot \mathfrak{R}$ локально изоморфна $\widetilde{\mathfrak{G}}$. Каждый элемент $\widetilde{\mathfrak{L}}/N$ производит

нетождественный автоморфизм $\mathfrak{R}$. Поэтому мы можем элементы $\widetilde{\mathfrak{L}}/N$ отождествить с соответствующими автоморфизмами и тем самым отобразить изоморфно $\mathfrak{G}$ на некоторую подгруппу $\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{R}$ полупрямого произведения $\mathfrak{S}\cdot\mathfrak{R}$. В силу теоремы 1а найдется такой элемент $\sigma\in\mathfrak{S}$, что $\sigma^{-1}\mathfrak{P}\sigma\subset\mathfrak{L}$. Так как $\sigma^{-1}\mathfrak{R}\sigma=\mathfrak{R}^{\sigma}=\mathfrak{R}$, то $\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{R}$ с помощью автоморфизма σ изоморфно отобразится на $\sigma^{-1}\mathfrak{P}\sigma\cdot\mathfrak{R}$, и первое утверждение доказано. Вместе с тем мы видим, что сопряженные подгруппы $\mathfrak{L}_1$ и $\sigma^{-1}\mathfrak{L}_1\sigma$ дают изоморфные группы $\mathfrak{L}_1\cdot\mathfrak{R}\cong\sigma^{-1}\mathfrak{L}_1\sigma\cdot\mathfrak{R}$.

Остается доказать последнее утверждение. Пусть $\mathfrak{G}_1=\mathfrak{L}_1\cdot\mathfrak{R}$, $\mathfrak{G}_2=\mathfrak{L}_2\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{G}_1\cong\mathfrak{G}_2$. Обозначим этот изоморфизм через θ, так что $\mathfrak{G}_1^{\theta}=\mathfrak{G}_2$. Радикал $\mathfrak{R}$ является характеристической подгруппой, поэтому $\mathfrak{R}^{\theta}=\mathfrak{R}$. Следовательно, θ индуцирует в $\mathfrak{R}$ некоторый автоморфизм σ. Пусть $\mathfrak{L}_1^{\theta}=\mathfrak{L}_2^{*}$, тогда $\mathfrak{G}_2=\mathfrak{L}_2^{*}\mathfrak{R}$ и $(rl)^{\theta}=r^{\theta}l^{\theta}=l^{\theta}r^{\sigma l^{\theta}}$ $(r\in\mathfrak{R},\ l\in\mathfrak{L}_1)$. С другой стороны, $(rl)^{\theta}=(lr^{l})^{\theta}=l^{\theta}r^{l\sigma}$. Сравнивая, мы видим, что $r^{\sigma l^{\theta}}=r^{l\sigma}$, т. е. $\sigma^{-1}l\sigma=l^{\theta}$ и $\mathfrak{L}_1^{\theta}=\sigma^{-1}\mathfrak{L}_1\sigma=\mathfrak{L}_2^{*}$. По теореме 1 группа $\mathfrak{L}_2^{*}$ сопряжена с $\mathfrak{L}_2$. Следовательно, $\mathfrak{L}_1$ сопряжена с $\mathfrak{L}_2$ в группе $\mathfrak{S}\cdot\mathfrak{R}$. Так как $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ содержатся в максимальной полупростой подгруппе $\mathfrak{L}$ этой группы, то, применяя теорему 2, мы видим, что $\mathfrak{L}_2$ переводится в $\mathfrak{L}_1$ некоторым автоморфизмом $A(\mathfrak{L})$ *.

§ 2. Ортогональные и симплектические представления полупростых групп

Предметом настоящего параграфа является изучение полупростых подгрупп полупростых же групп Ли. В § 1 было показано, что более общая задача определения полупростых подгрупп в произвольных группах вполне эквивалентна этому ее частному случаю.

Пусть G — алгебра Ли и $\mathfrak{G}$ — ее присоединенная связная группа. Две подалгебры H, H_1 из G называются *сопряженными*, если одна из них переводится в другую некоторым преобразованием $\mathfrak{G}$. Алгебрам H, H_1 в $\mathfrak{G}$ отвечают связные, но может быть незамкнутые подгруппы $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_1$, которые тогда и только тогда сопряжены в $\mathfrak{G}$, когда сопряжены их подалгебры. Ясно, что для определения сопряженности подалгебр можно вместо $\mathfrak{G}$ брать любую группу с алгеброй G, лишь бы эта группа была связной.

Основной задачей является следующая. Дана полупростая алгебра G и система полупростых алгебр L_i $(i=1, 2, \ldots)$. Требуется в каждой из L_i найти все классы изоморфных G сопряженных подалгебр. В такой форме эта задача тесно связана с общей задачей теории представлений. Действительно, если $\mathfrak{G}_1$ подгруппа $\mathfrak{L}_i$, изоморфная $\mathfrak{G}$, то изоморфизм $\mathfrak{G}\to\mathfrak{G}_1$ есть по определению представление $\mathfrak{G}$ в $\{\mathfrak{L}_s\}$. Два представления $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ эквивалентны в $\mathfrak{L}_i$, если существует элемент $l\in\mathfrak{L}_i$, удовле-

* Если бы $\mathfrak{S}$ была связной, то введение группы $A(\mathfrak{L})$ было бы излишним. Однако $\mathfrak{S}$ в общем случае несвязна, и внутренние автоморфизмы $\mathfrak{S}$ могут давать внешние автоморфизмы связной ее компоненты.

творяющий соотношению $l^{-1}\mathfrak{D}_1(g)\,l = \mathfrak{D}_2(g)$ для всех $g \in \mathfrak{G}$. Ясно, что эквивалентные представления $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ дают подгруппы $\mathfrak{D}_1(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{D}_2(\mathfrak{G})$, сопряженные в $\mathfrak{L}_i$. Обратное не всегда верно. Именно, из $\mathfrak{D}_2(\mathfrak{G}) = l^{-1}\mathfrak{D}_1(\mathfrak{G})\,l$ следует только, что для каждого $g \in \mathfrak{G}$ существует единственный элемент $g^\sigma \in \mathfrak{G}$, удовлетворяющий соотношению $\mathfrak{D}_2(g) = l^{-1}\mathfrak{D}_1(g^\sigma)\,l$. Преобразование σ является автоморфизмом $\mathfrak{G}$. Если этот автоморфизм внутренний, то $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ сопряжены в $\mathfrak{L}_i$; если внешний, то сопряженности может не быть.

К этому же кругу вопросов можно отнести и задачу определения классов внешне сопряженных подалгебр из $\{\mathfrak{L}_i\}$, т. е. подалгебр, переводящихся друг в друга не только внутренними, но и внешними автоморфизмами $\mathfrak{L}_i$.

Отношения, существующие между сформулированными тремя задачами, могут быть представлены следующим образом. Пусть сначала каким-либо путем мы нашли все представления G в L_i с точностью до эквивалентности. Тогда, объединяя в один класс представления, переводящиеся друг в друга внешними автоморфизмами G, мы получим сопряженные подалгебры L_i. Наконец, объединяя в один класс представления G, переходящие друг в друга не только при всех автоморфизмах G, но и при всех автоморфизмах L_i, мы получим внешне сопряженные подалгебры L_i. Таким образом, основным является отыскание представлений G в системе $\{L_s\}$ и нахождение внешних автоморфизмов G и L_i. Нас интересует определение полупростых подгрупп в полупростых группах. Так как внешние автоморфизмы полупростых групп хорошо известны, то дело сводится к построению теории представлений полупростых групп в полупростых группах.

Эта задача допускает дальнейшие упрощения. По теореме Картана каждая полупростая алгебра распадается в прямую сумму своих простых идеалов. Пусть $L = L_1 + L_2 + \ldots + L_k$ — такое разложение и $\mathfrak{D}$ — некоторое представление G в L. Тогда разложение $\mathfrak{D}(g) = l_1 + l_2 + \ldots + l_k$ $(l_i \in L_i)$ создает систему представлений $g \to l_i = \mathfrak{D}_i(g)$ алгебры G в простых алегебрах L_i. Обратно, произвольная система таких представлений ведет к представлению G в L. Два представления $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$ сопряжены в L тогда и только тогда, когда их соответственные составляющие $\mathfrak{D}_i$, $\mathfrak{D}'_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ сопряжены в L_i. Следовательно, общая задача оказывается эквивалентной определению всех представлений G в простых алгебрах.

Простые группы известны и распадаются на четыре бесконечные серии $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{C}_n$, $\mathfrak{D}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ классических групп и на пять особых групп $\mathfrak{E}_6$, $\mathfrak{E}_7$, $\mathfrak{E}_8$, $\mathfrak{F}_4$, $\mathfrak{G}_2$. Для решения общей задачи нужно, следовательно, построить теорию представлений в каждой из этих групп. Однако здесь мы это сделаем только для классических групп. Что касается особых групп, то наименьшие из них $\mathfrak{F}_4$, $\mathfrak{G}_2$ будут рассмотрены в § 3, а представления в $\mathfrak{E}$ пока не изучены.

В известных мемуарах É. Cartan'a (2) и H. Weyl'я (11) дана общая теория линейных представлений полупростых групп. Так как всякая матричная связная полупростая группа может сдержать только матрицы

определителя 1, то теорию Картана можно рассматривать как теорию представлений полупростых групп в группах $\mathfrak{A}_n$. Результаты этой теории позволяют построить и теорию представлений полупростых групп в остальных классических группах $\mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{C}_n$, $\mathfrak{D}_n$, т. е. теорию симплектических и ортогональных представлений. В дальнейшем мы будем пользоваться общей системой координат. В таких координатах группы $\mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{D}_n$ будут группами всех линейных преобразований в пространстве соответственно $2n+1$ и $2n$ измерений, оставляющих инвариантной некоторую невырожденную симметричную билинейную форму, а группы $\mathfrak{C}_n$ будут группами линейных преобразований в пространстве $2n$ измерений, оставляющих инвариантной произвольную невырожденную кососимметрическую форму.

n° 4. Ортогональная и симплектическая эквивалентность. Как сказано, нашей задачей является изучение ортогональных и симплектических представлений полупростых групп. Эти представления — частный случай общих линейных представлений, которые известны. Однако общие линейные представления классифицируются с точностью до эквивалентности в общей линейной группе, в то время как симплектические и ортогональные представления должны быть определены с точностью до симплектической или, соответственно, собственно ортогональной эквивалентности. Отсюда, общая задача распадается на две части:

1° узнать, каким образом класс эквивалентных в общей линейной группе симплектических представлений распадается на классы симплектически-эквивалентных (и аналогично для ортогональных);

2° определить, какие линейные представления являются ортогональными и какие симплектическими. Ответ на первый вопрос дают два предложения этого n°.

ТЕОРЕМА 1. *Если два симплектических или ортогональных представления $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ некоторой группы $\mathfrak{G}$ эквивалентны в общей линейной группе, то они эквивалентны и в группе симплектических или, соответственно, в группе всех собственных и несобственных ортогональных преобразований.*

Доказательство этой теоремы для случая ортогональных групп содержится уже у Фробениуса (5). Для полноты мы его здесь воспроизводим. Положим $\mathfrak{D}_1(\mathfrak{G})=\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{D}_2(\mathfrak{G})=\mathfrak{G}_2$. По условию, преобразования $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$ оставляют инвариантной квадратичную форму $\sum x_i^2$. Так как $A^{-1}\mathfrak{G}_1A=\mathfrak{G}_2$, то $\mathfrak{G}_2$ оставляет инвариантной вторую форму с матрицей $U=A^*A$ *. Это означает, что $G_2^*G_2=E$ и $G_2^*UG_2=U$ для $G_2\in\mathfrak{G}_2$. Следовательно, U перестановочна со всеми матрицами $\mathfrak{G}_2$. Квадратичную форму U ортогональным преобразованием D можно привести к диагональному виду $U=\lambda_1E_1\dot{+}\ldots\dot{+}\lambda_sE_s$. Таким образом, в новой системе координат матрицы $\mathfrak{G}_2$ перестановочны с диагональной матрицей U и поэтому сами распадаются на соответственные части $G_2=G_2^{(1)}\dot{+}\ldots\dot{+}G_2^{(s)}$.

---

* Через A^* будет обозначаться транспонированная матрица. Выражение $X=Y\dot{+}Z$ обозначает, что матрица X распадается на части Y, Z.

Отсюда следует, что матрица $T=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}E_1+\ldots+\frac{1}{\sqrt{\lambda_s}}E_s$ также перестановочна с $\mathfrak{G}_2$. Матрица $B=AT$ ортогональна и $B^{-1}\mathfrak{G}_1 B=\mathfrak{G}_2$, что и требовалось.

Случай симплектических представлений. Даны две связные группы $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ симплектических матриц, эквивалентные в общей линейной группе: $\mathfrak{G}_2=A^{-1}\mathfrak{G}_1 A$. Нам нужно показать, что найдется симплектическая матрица S, для которой произведение AS будет перестановочно со всеми матрицами $\mathfrak{G}_1$. Пусть U — кососимметрическая билинейная форма, инвариантность которой определяет понятие симплектичности в данной системе координат. Выберем новую систему координат так, чтобы пара кососимметрических форм U и $V=AUA^*$ приняла вид

$$U=\begin{pmatrix}0 & E\\ -E & 0\end{pmatrix},\quad V=\begin{pmatrix}0 & X\\ -X^* & 0\end{pmatrix}.$$

Группы $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ связны и поэтому вместо них самих можно рассматривать их соответственные инфинитезимальные алгебры $\tilde{G}_1$, $\tilde{G}_2$. Пусть $G_1\in\tilde{G}_1$, $G_2=A^{-1}G_1A$, $G_2\in\tilde{G}_2$. По предположению,

$$G_1^*U+UG_1=0, \tag{1}$$
$$G_2^*U+UG_2=0. \tag{2}$$

Подставляя в (2) вместо G_2 его выражение через G_1 и исключая G_1^* с помощью (1), мы получим соотношение

$$G_1W=WG_1, \tag{3}$$

где

$$W=-VU=\begin{pmatrix}X & 0\\ 0 & X^*\end{pmatrix}.$$

Нам нужно найти матрицу S, удовлетворяющую условиям

$$AS\cdot G_1=G_1\cdot AS,\quad S^*US=U. \tag{4}$$

Ищем S в виде $S=UAQ$, где

$$Q=\begin{pmatrix}0 & \varphi(X^*)\\ -\varphi(X) & 0\end{pmatrix},$$

φ — неизвестная пока функция. Условия (4) теперь перепишутся так:

$$G_1\cdot W\varphi(W)=W\varphi(W)\cdot G_1,$$
$$\varphi(X^*)X^*\varphi(X^*)=E.$$

Первое из этих равенств выполняется при любой функции φ в силу (3), а из второго находим

$$\varphi(X)=X^{-\frac{1}{2}},$$

где для $\sqrt{X}$ следует взять значение, выражающееся в виде полинома от X.

Теорема 1 не вполне решает вопрос о разложении классов эквивалентных представлений на ортогонально эквивалентные. Действительно, согласно определению два представления алгебры G в алгебре L называются сопряженными в L, если они сопряжены в присоединенной

группе $\mathfrak{L}$ или вообще в любой связной группе с алгеброй L. Однако, в то время как группа всех симплектических преобразований связна, группа всех ортогональных преобразований $\mathfrak{O}(n)$ распадается на две компоненты. Легко видеть при этом, что в пространстве нечетного числа измерений сопряженность при помощи несобственного ортогонального преобразования влечет за собою сопряженность при помощи собственного. Таким образом, теорема 1 полностью решает вопрос о сопряженности представлений в группах $\mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{C}_n$. Что касается групп $\mathfrak{D}_n$, то они требуют особого рассмотрения.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\mathfrak{A}$ — вполне приводимая связная группа ортогональных матриц степени $2n$. Если каждая из неприводимых частей, на которые распадается $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{O}(2n)$, имеет четную степень, то класс эквивалентных в $\mathfrak{O}(2n)$ представлений $\mathfrak{A}$ распадается на два подкласса относительно собственных ортогональных преобразований $\mathfrak{O}^+(2n)$. Если среди ортогонально неприводимых частей $\mathfrak{A}$ есть часть нечетной степени, то все сопряженные с $\mathfrak{A}$ ортогональные представления остаются сопряженными и в $\mathfrak{O}^+(2n)$.*

Достаточно доказать только первое утверждение, так как второе очевидно. Преобразуя $\mathfrak{A}$ с помощью несобственной ортогональной матрицы, мы получим новое представление $\mathfrak{A}$. Нужно показать, что это представление не эквивалентно старому в $\mathfrak{O}^+(2n)$ или, что то же самое, что не существует несобственной ортогональной матрицы, перестановочной со всеми матрицами $\mathfrak{A}$. Раскладываем $\mathfrak{A}$ на ортогональные, ортогонально неприводимые части и выбираем такую систему координат, чтобы эквивалентные части стояли рядом. Объединяя эквивалентные части в отдельные клетки, мы получим разложение $\mathfrak{A}$ вида

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \dotplus \mathfrak{A}_2 \dotplus \ldots \dotplus \mathfrak{A}_m.$$

Ниже будет показано, что ортогонально неприводимые системы либо абсолютно неприводимы, либо распадаются на две взаимно контрагредиентные абсолютно неприводимые части. В частности, неэквивалентные ортогонально неприводимые системы не содержат эквивалентных частей. Следовательно, всякая матрица T, перестановочная с $\mathfrak{A}$, распадается на соответственные части

$$T = T_1 \dotplus T_2 \dotplus \ldots \dotplus T_m.$$

Если T ортогональна, то и T_i ортогональны. Поэтому теорема требует доказательства только для систем, распадающихся на эквивалентные ортогонально неприводимые части. Здесь могут представиться три случая.

1. $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \dotplus \mathfrak{A}_2 \dotplus \ldots \dotplus \mathfrak{A}_m$, $\mathfrak{A}_i$ — ортогональны и абсолютно неприводимы. Выберем такую систему координат, чтобы все $\mathfrak{A}_i$ совпали. Тогда перестановочная с $\mathfrak{A}$ матрица T должна иметь вид $T = |t_{ij}E|$, где E — единичная матрица, размерность которой p равна размерности отдельных неприводимых частей и, следовательно, четна. Из ортогональности T следует ортогональность $\| t_{ik} \|$. Но в таком случае

$$|T| = |t_{ik}|^p = (\pm 1)^p = 1.$$

2. $\mathfrak{A}$ разлагается на ортогональные части, каждая из которых состоит из двух эквивалентных абсолютно неприводимых частей. Выбирая подходящую систему координат, мы приведем все матрицы $A \in \mathfrak{A}$ к виду

$$A = (A_1 \dot{+} A_1) \dot{+} (A_1 \dot{+} A_1) \dot{+} \ldots \dot{+} (A_1 \dot{+} A_1),$$

где $\{A_1\}$ абсолютно неприводимы и неортогональны. По предположению $A_1^{*-1} = U^{-1} A_1 U$ *. Отсюда следует, что U кососимметрична. Единственными инвариантными симметрическими формами для преобразований $A_1 \dot{+} A_1$ будут формы вида $\lambda \begin{pmatrix} 0 & U \\ -U & 0 \end{pmatrix}$. Соответственно, единственными инвариантными симметрическими формами для A будут формы вида

$$S = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & U \\ -U & 0 \end{pmatrix} \dot{+} \ldots \dot{+} \lambda_m \begin{pmatrix} 0 & U \\ -U & 0 \end{pmatrix}.$$

Форму S можно записать в виде произведения VW, где

$$V = (U \dot{+} U) \dot{+} \ldots \dot{+} (U \dot{+} U),$$

$$W = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \dot{+} \ldots \dot{+} \lambda_m \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}.$$

Если T перестановочна с $\mathfrak{A}$ и форма S инвариантна для T, то T должна иметь вид

$$T = \| t_{ij} E \|, \quad T^* VWT = VW \quad (i, j = 1, 2, \ldots, 2m).$$

Последнее соотношение дает $T^* WT = W$. Значит, T — симплектическая матрица и в качестве таковой имеет определитель $+1$.

3. Ортогонально неприводимые части $\mathfrak{A}$ распадаются на пары неэквивалентных абсолютно неприводимых частей. В этом случае матрицы $\mathfrak{A}$ можно привести к виду

$$A = A_1 \dot{+} \ldots \dot{+} A_1 \dot{+} A_1^{*-1} \dot{+} \ldots \dot{+} A_1^{*-1}.$$

Инвариантная относительно A симметрическая форма должна иметь вид

$$S = \begin{pmatrix} 0 & X \\ X & 0 \end{pmatrix}.$$

Если T перестановочна со всеми A, то T распадается, $T = T_1 \dot{+} T_2$ и условие инвариантности S относительно T дает соотношение $T_1^* X T_2 = X$, откуда $|T| = |T_1| |T_2| = +1$.

n° 5. Разложение на неприводимые части. Всякое линейное представление полупростой группы вполне характеризуется определенной системой инвариантов — так называемых картановских весов неприводимых частей этого представления. Результаты предшествующего n° показывают, что теми же инвариантами характеризуются и представления полупростых групп в $\mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{C}_n$. Что касается представлений в $\mathfrak{D}_n$, то

---

* См. далее n° 5.

здесь система весов определяет иногда одно, иногда два представления, переходящие друг в друга посредством несобственного ортогонального преобразования. Так как здесь каждому весу соответствует самое большее два представления, к тому же весьма просто друг с другом связанные, то можно считать, что и в $\mathfrak{D}_n$ представления можно задавать весами. Таким образом, остается решить только второй из двух сформулированных в n° 4 вопросов, именно, определить, каким системам весов соответствуют симплектические и каким—ортогональные представления. Мы придем к решению этой задачи, как обычно, с помощью разложения ортогональных и симплектических представлений на их неприводимые части.

ТЕОРЕМА 3. *Если ортогональное или симплектическое представление $\mathfrak{D}$ полупростой группы $\mathfrak{G}$ распадается на две части, одна из которых ортогональна или, соответственно, симплектична, тогда и вторая часть, соответственно, ортогональна или симплектична.*

Рассмотрим случай ортогональных представлений. По условию, пространство R, в котором оперируют преобразования $\mathfrak{D}$, распадается на два инвариантных подпространства $R_1 \dotplus R_2$, причем на R и R_1 существуют невырожденные симметрические билинейные формы $f(x, y)$ и $g(x, y)$, инвариантные относительно $\mathfrak{G}$. Если $f(x, y)$ не вырождается на R_1, то, беря ортогональное к R_1 подпространство R_3, мы получим расщепление $R = R_1 \dotplus R_3$, соответственно которому разложится на требуемые ортогональные части и представление $\mathfrak{D}$ *. Если, наоборот, $f(x, y)$ вырождается на R_1, то полагая $g(x, r_2) = 0$ $(x \in R,\ r_2 \in R_2)$, мы продолжим $g(x, y)$ на все пространство R. Инвариантная форма $h(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ при достаточно малых λ не вырождается ни на R, ни на R_1, и считая, что понятие ортогональности определяется теперь формой $h(x, y)$, мы возвращаемся к разобранному случаю. Ясно, что те же самые рассуждения остаются в силе и для симплектических представлений.

Следствие. *Все ортогональные и симплектические представления полупростых групп распадаются в $\mathfrak{O}^+(n)$ или $\mathfrak{C}_n$ на ортогонально или, соответственно, симплектически неприводимые части.*

Действительно, из только что доказанной теоремы следует, что такое разложение возможно в общей линейной группе. Так как оба представления, исходное и разложенное, ортогональны или симплектичны, то в силу теорем предыдущего n° они эквивалентны и в $\mathfrak{O}(n)$ или, соответственно, $\mathfrak{C}_n$. Но сверх того ясно, что если распадение представления возможно в $\mathfrak{O}(n)$, то оно возможно и в $\mathfrak{O}^+(n)$, что и требовалось.

Симплектически или ортогонально неприводимые представления весьма просто связаны с абсолютно неприводимыми. Пусть $\mathfrak{G}$—какая-либо группа, $g \to G$ ее матричное представление. Соответствие $g \to G^{*-1}$ будет также представлением $\mathfrak{G}$. Это представление называется дуальным или контрагредиентным первоначальному.

* В силу известной теоремы об однозначности распадения представления на неприводимые части, представления $\mathfrak{G}$ в R_2 и в R_3 эквивалентны.

ТЕОРЕМА 4. *Ортогональное, ортогонально неприводимое представление $\mathfrak{D}$ полупростой группы $\mathfrak{G}$ либо абсолютно неприводимо, либо эквивалентно сумме двух контрагредиентных абсолютно неприводимых представлений. То же самое имеет место для симплектических представлений. Сумма двух контрагредиентных представлений одновременно ортогональна и симплектична.*

Доказательство. Пусть данное представление $\mathfrak{D}$ ортогонально и приводимо в полной линейной группе, $\mathfrak{D}=\mathfrak{D}_1\dot{+}\mathfrak{D}_2$, где $\mathfrak{D}_1$—одна из абсолютно неприводимых частей $\mathfrak{D}$. Обозначим через $f(x, y)$ инвариантную симметричную форму, определенную и невырождающуюся на всем пространстве R. Соответственно разложению $\mathfrak{D}$ это пространство разложится на инвариантные подпространства $R_1\dot{+}R_2$. Если $f(x, y)$ не равна тождественно нулю на одном из этих подпространств, например R_2, то $\mathfrak{D}$ ортогонально приводимо. Действительно, совокупность векторов R_2, перпендикулярных ко всему R_2, образует инвариантное подпространство. Так как всякое представление полупростой группы распадается на неприводимые части, то в R_2 найдется дополнительное инвариантное подпространство, на котором $f(x, y)$ будет уже невырожденной. Отсюда, согласно предыдущей теореме, вытекает ортогональная приводимость $\mathfrak{D}$. Таким образом, $f(x, y)$ аннулируется на обоих подпространствах R_1 и R_2. Это позволяет выбрать в R специальный базис. Пусть e_1 — произвольный вектор в R_1. Из невырожденности $f(x, y)$ вытекает, что в R_2 найдется вектор ε_1, $f(e_1, \varepsilon_1)=1$. Рассмотрим подпространство $R'\subset R$, перпендикулярное к паре e_1, ε_1. Очевидно, $R'=R_1'+R_2'$, где $R_1'=R_1\cap R'$, $R_2'=R_2\cap R'$. Теперь мы можем выбрать пару векторов $e_2\in R_1'$, $\varepsilon_2\in R_2'$, $f(e_2, \varepsilon_2)=1$ и т. д. Пусть элементу $g\in\mathfrak{G}$, при фиксированном таким способом базисе $e_1, \ldots, e_m$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ соответствует матрица $A\dot{+}B$. Для $x=\sum x^i e_i$, $y=\sum y^i\varepsilon_i$ имеем $f(x, y)=\sum x^i y^i$. Инвариантность этой формы дает $A^*B=E$, т. е. $B=A^{*-1}$. Те же самые рассуждения имеют силу и для симплектических преобразований. Наконец, последнее утверждение теоремы очевидно, так как преобразование $A\dot{+}A^{*-1}$ оставляет инвариантными формы с матрицами

$$U=\begin{pmatrix}0 & E\\ E & 0\end{pmatrix},\quad V=\begin{pmatrix}0 & E\\ -E & 0\end{pmatrix}.$$

ТЕОРЕМА 5. *Для того чтобы представление $\mathfrak{D}$ некоторой группы допускало инвариантную невырождающуюся билинейную форму, необходимо и достаточно, чтобы оно было эквивалентно своему контрагредиентному.*

Действительно, если форма x^*Ty инвариантна относительно преобразования A, то $A^*TA=T$, или $A=T^{-1}A^{*-1}T$. Обратно, если $A=T^{-1}A^{*-1}T$ то x^*Ty инвариантна. Отсюда же видно, что для ортогональности $\mathfrak{D}$ достаточно, чтобы $\mathfrak{D}$ преобразовывалось в $\mathfrak{D}^{*-1}$ при помощи симметрической а для симплектичности — при помощи кососимметрической матрицы.

ТЕОРЕМА 6. *Абсолютно неприводимая система матриц не может быть одновременно ортогональной и симплектической. Абсолютно неприводимая самоконтрагредиентная система либо ортогональна, либо симплектична.*

В самом деле, если система $\mathfrak{D}$ симплектична и ортогональна, то $U^{-1}D^{*-1}U=D$, $V^{-1}D^{*-1}V=D$, где U кососимметрична, V симметрична и $D\in\mathfrak{D}$. Отсюда $UV^{-1}\cdot D=D\cdot UV^{-1}$. По лемме Шура $UV^{-1}=\lambda E$, что невозможно. Если система $\mathfrak{D}$ самоконтрагредиентна, то она допускает инвариантную билинейную форму $f(x, y)$. Формы $g=f+f^*$, $h=f-f^*$ также инвариантны, и обе быть невырожденными не могут. Пусть одна из них, например $g(x, y)$, вырождается, но не обращается тождественно в нуль. Тогда совокупность векторов, перпендикулярных относительно $g(x, y)$ ко всему пространству, была бы инвариантным подпространством системы $\mathfrak{D}$, которого по условию нет. Следовательно, $g=0$, $f=-f^*$, что и требовалось.

Для дальнейшего нам будет удобнее иметь теорему 5, сформулированную в терминах картановской теории весов. Пусть G — полупростая алгебра Ли и $\mathfrak{D}$ — ее матричное представление. Обозначим, как обычно, через H максимальную регулярную абелеву подалгебру в G. Так как H коммутативна, то в пространстве R найдутся векторы, являющиеся собственными векторами одновременно для всех матриц H. Это так называемые весовые векторы представления $\mathfrak{D}$. Пусть $h_1, \ldots, h_n$ — линейный базис алгебры H и $\bar{a}$ — какой-либо весовой вектор. Тогда $h_i\bar{a}=a_i\bar{a}$, $h\bar{a}=\Lambda\bar{a}$, где $h=\lambda_1h_1+\ldots+\lambda_nh_n$ — общий элемент H (λ_i — произвольные параметры) и $\Lambda=a_1\lambda_1+\ldots+a_n\lambda_n$ — вес вектора $\bar{a}$. Каждое представление G имеет конечное число весов Λ (при фиксированных $h_1, \ldots, h_n$). Считая линейную форму от λ_i положительной, если положителен первый отличный от нуля коэффициент ее, мы упорядочиваем все веса всех представлений G. Согласно Картану, наибольший из весов какого-нибудь представления G определяет это представление с точностью до эквивалентности.

Рассмотрим теперь контрагредиентное представление группы $\mathfrak{G}$. Переходу $A\to A^{*-1}$ в группе матриц соответствует переход $A\to -A^*$ в инфинитезимальной алгебре матриц. Таким образом, чтобы найти веса контрагредиентного представления алгебры G, нужно решить уравнение $-H^*\bar{x}=\Lambda\bar{x}$. Однако при любом представлении G в пространстве R можно найти такую систему координат, чтобы матрицы H имели диагональную форму ([6]). Тогда $H^*=H$, и уравнение для определения весов принимает вид $-Hx=\Lambda\bar{x}$. Отсюда следует, что веса контрагредиентного представления равны весам первоначального, взятым с обратным знаком. В частности,

Чтобы два неприводимых представления полупростой группы были контрагредиентны, необходимо и достаточно, чтобы максимальный вес одного представления равнялся взятому с обратным знаком минимальному весу другого. Чтобы представление было самоконтрагредиентно, необходимо и достаточно, чтобы его максимальный и минимальный веса отличались лишь знаком.

Картаном указан способ, как, зная максимальный вес представления, найти все остальные его веса (²). В соединении с изложенными теоремами это дает возможность выделить все представления, имеющие инвариантную билинейную форму. Однако остается еще вопрос, когда эта форма будет симметричной и когда — кососимметричной. Для простых групп ответ на него будет дан в явном виде в следующем n°, а сейчас мы обычным путем покажем, что случай полупростых групп непосредственно приводится к изучению простых.

В самом деле, пусть даны неприводимые представления $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ групп $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Если $\mathfrak{D}_1(a)=\|a_{ij}\|$, $\mathfrak{D}_2(b)=\|b_{kl}\|$, $a\in\mathfrak{A}$, $b\in\mathfrak{B}$, то соответствие

$$\mathfrak{D}(a, b)=\|c_{ik,\, jl}\|, \quad c_{ik,\, jl}=a_{ij}\, b_{kl}$$

является представлением прямого произведения $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$. Это представление неприводимо, и все неприводимые представления $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$ таким способом могут быть получены. Теперь легко видеть, что представление прямого произведения тогда и только тогда самоконтрагредиентно, когда самоконтрагредиентны представления сомножителей, из которых оно получено. Действительно, представление произведения, рассматриваемое для какого-либо сомножителя в отдельности, распадается на сумму одинаковых представлений, эквивалентных первоначальному представлению этого сомножителя. Но сумма эквивалентных представлений самоконтрагредиентна только, если каждое представление в отдельности самоконтрагредиентно. Обратное также верно, ибо если форма с матрицей $f=\|f_{ij}\|$ инвариантна для представления $\mathfrak{D}_1$, форма $g=\|g_{kl}\|$ — для представления $\mathfrak{D}_2$, то форма $h=f\times g$ с матрицей $h=\|h_{ik,\, jl}\|$, $h_{ik,\, jl}=$ $=f_{ij}\, g_{kl}$, будет инвариантной относительно представления прямого произведения. В частности, отсюда видно, что если оба исходные представления ортогональны или симплектичны, то представление прямого произведения будет ортогональным; если одно из исходных ортогонально, а другое симплектично, то представление произведения симплектично.

Аналогично, если два неприводимые представления $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$ прямого произведения получаются указанным способом из неприводимых представлений $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ и $\mathfrak{D}_1'$, $\mathfrak{D}_2'$ сомножителей, то $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{D}'$ тогда и только тогда контрагредиентны, когда $\mathfrak{D}_1$ контрагредиентно $\mathfrak{D}_1'$, $\mathfrak{D}_2$ контрагредиентно $\mathfrak{D}_2'$.

n° 6. Представления простых групп. Согласно Картану, неприводимые представления простых групп $\mathfrak{G}$ получаются так. Сначала строятся так называемые базисные представления $\mathfrak{G}$. Затем кронекеровские произведения произвольного числа этих представлений расщепляются на неприводимые части и среди последних каждый раз берется часть с наибольшим весом. Совокупность полученных таким способом представлений исчерпывает вообще все неприводимые представления $\mathfrak{G}$. Следует еще отметить, что при расщеплении кронекеровского произведения на неприводимые части часть с максимальным весом встречается только один раз и ее вес равен сумме весов перемножаемых представ-

лений. При составлении базисных представлений Картаном используется процесс альтернирования, который будет описан ниже. Нас интересует вопрос об ортогональности и симплектичности представлений, и естественно сначала установить, как ведут себя представления при кронекеровских произведениях и альтернированиях.

ЛЕММА 1. *Кронекеровское произведение двух контрагредиентных представлений ортогонально. Кронекеровское произведение двух ортогональных или двух симплектических представлений ортогонально, произведение ортогонального на симплектическое — симплектично.*

Доказательство. Пусть данные представления группы $\mathfrak{G}$ суть A и B. Обозначим базис пространства первого из них через $e_1, e_2, \ldots, e_m$, второго через $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$. Линейные комбинации формальных произведений $e_i\varepsilon_j$ дают линейное пространство R. Если векторы e_i подвергнуть преобразованию $A(g)$, а векторы ε_j преобразованию $B(g)$, $g \in \mathfrak{G}$, то билинейные формы, образующие пространство R, подвергнутся некоторому линейному преобразованию, которое и будет кронекеровским произведением $A \times B$. Пусть базисные векторы e_i, ε_j выбраны так, что представления A, B точно контрагредиентны, $A(g) = B^{*-1}(g)$. Тогда билинейная форма, определяемая равенствами $f(e_i\varepsilon_k, e_j\varepsilon_l) = \delta_{il}\delta_{kj}$, будет, очевидно, невырожденной, симметричной и инвариантной относительно $A \times B$.

Рассмотрим теперь второе утверждение леммы. Пусть A оставляет инвариантной форму $f(x, y)$, B — форму $k(x, y)$. Билинейная форма $h(e_i\varepsilon_s, e_j\varepsilon_t) = f(e_i, e_j)\,k(\varepsilon_s, \varepsilon_t)$ не вырождена и инвариантна относительно $A \times B$. Ясно, что если f, k обе симметричны или обе кососимметричны, то h симметрична. В противном случае h кососимметрична, и все утверждения леммы доказаны.

Процесс альтернирования заключается в следующем. Пусть дано некоторое преобразование A в пространстве с базисом $e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, \ldots, e_n^{(1)}$. Образуем формально еще систему линейных пространств с базисами $e_1^{(2)}, \ldots, e_n^{(2)}; \ldots; e_1^{(k)}, \ldots, e_n^{(k)}$. Кронекеровское произведение $T = A \times A \times \cdots \times A$ можно рассматривать как преобразование в пространстве полилинейных форм

$$f(e^{(1)}, \ldots, e^{(k)}) = \sum M_{i_1, \ldots, i_k} e_{i_1}^{(1)} \ldots e_{i_k}^{(k)}.$$

Формы, меняющие свой знак при каждой транспозиции рядов переменных $e^{(1)}, \ldots, e^{(k)}$, образуют линейное инвариантное относительно T подпространство S. Преобразование, индуцируемое T в S, носит название k-го альтернирования A и будет обозначаться $A^{[k]}$. Если A оставляет инвариантной билинейную форму f в пространстве R, то форма $h = f \times f \times \ldots \times f$ будет невырожденной в $R \times R \times \cdots \times R$ и инвариантной относительно $T = A \times A \times \cdots \times A$. Легко видеть, что h остается невырожденной и на S. Принимая во внимание лемму 1, мы видим, что имеет место также

ЛЕММА 2. *Альтернирования ортогонального представления ортогональны. Четные альтернирования симплектического представления ортогональны, нечетные — симплектичны.*

Леммы 1, 2 и результаты предшествующего n° позволяют легко найти все ортогональные и симплектические представления простых групп. Нам нужно, следовательно, 1) для каждого веса указать контрагредиентный вес и 2) для каждого самоконтрагредиентного веса определить, принадлежит ли он симплектическому или ортогональному представлению.

Группы A_n. Наибольшими весами являются формы $\Lambda = p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + + \ldots + p_n\lambda_n$, где p_i — целые числа, $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_n \geqslant 0$. Полагаем $\lambda_{n+1} = -\lambda_1 - \lambda_2 - \ldots - \lambda_n$ и пишем Λ в виде $p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + \ldots + + \ldots + p_n\lambda_n + 0 \cdot \lambda_{n+1}$. Если в этом выражении произвольно переставлять λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$, то снова получаются веса того же самого представления, и притом все крайние веса таким способом заведомо получатся [ср. ([2])]. Отсюда видно, что наименьшим весом будет форма

$$p_1\lambda_{n+1} + p_2\lambda_n + \ldots + p_n\lambda_2 = -p_1\lambda_1 - (p_1 - p_n)\lambda_2 - \ldots - (p_1 - p_2)\lambda_n,$$

и максимальный вес контрагредиентного представления равен

$$\Lambda^* = p_1\lambda_1 + (p_1 - p_n)\lambda_2 + \ldots + (p_1 - p_2)\lambda_n.$$

Значит, для самоконтрагредиентности Λ необходимо и достаточно, чтобы

$$p_1 = p_2 + p_n = p_3 + p_{n-1} = \ldots$$

Теперь определим, какие из самоконтрагредиентных весов ортогональны и какие симплектичны. Пусть, сначала, коэффициент p_1 четен, $p_1 = 2k$. Форма

$$Q = q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2 + \ldots + q_n\lambda_n,$$

где

$$q_1 = k, \quad q_i = \frac{1}{2}(p_i - p_{n-i+2}), \quad q_j = 0 \quad (i = 1, \ldots, k;\ j = k+1, \ldots, n)$$

будет весом некоторого представления. Контрагредиентный вес имеет выражение

$$Q^* = q_1\lambda_1 + q_1\lambda_2 + \ldots + q_1\lambda_k + p_{k+1}\lambda_{k+1} + \ldots + p_n\lambda_n$$

и, таким образом, $\Lambda = Q + Q^*$. Кронекеровское произведение $\mathfrak{D}$ представлений с весами Q, Q^* среди своих абсолютно неприводимых частей содержит и только один раз представление с весом Λ. Так как $\mathfrak{D}$ ортогонально, то все абсолютно неприводимые части $\mathfrak{D}$ должны быть либо ортогональными, либо входить в пары взаимно-контрагредиентных. Но Λ самоконтрагредиентно и встречается один раз. Следовательно, оно ортогонально. В частности, если n четно, $n = 2m$, то в самоконтрагредиентном весе $p_1 = 2p_m$ — число четное. Поэтому все самоконтрагредиентные представления групп A_{2m} ортогональны.

Пусть n нечетно, $n = 2m + 1$. Группа $\mathfrak{A}_n$ матричная и поэтому является своим собственным представлением. Альтернируя его $m+1$ раз, мы получим неприводимое представление $A_n^{[m+1]}$ веса $\Lambda_{m+1} = \lambda_1 + \lambda_2 + + \ldots + \lambda_{m+1}$. Это представление самоконтрагредиентно и вообще является наинизшим самоконтрагредиентным представлением $\mathfrak{A}_n$. Покажем, что для m четного Λ_{m+1} симплектично, для нечетного — ортогонально. Дей-

ствительно, $\mathfrak{A}_n$ образована матрицами определителя 1, поэтому детерминант $D=[x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n+1)}]$, составленный из компонент $n+1$ переменного вектора $x^{(i)}$, инвариантен. Разложение D по минорам первых $m+1$ строк можно рассматривать как билинейную форму относительно этих миноров и миноров последних $m+1$ строк. Заменяя в D миноры соответствующими компонентами вектора в пространстве $A_n^{[m+1]}$, мы получим искомую инвариантную билинейную форму. Ясно, что эта форма симметрическая для $m+1$ четного и кососимметрическая в противном случае.

Обращаясь к другим представлениям $\mathfrak{A}_n$, мы предположим сначала, что $m+1$ четно, $m=2k+1$, $n=4k+3$. Утверждается, что в этом случае все самоконтрагредиентные представления $\mathfrak{A}_n$ ортогональны. В самом деле, для наинизшего представления с весом Λ_{m+1} это верно. Пусть $\Lambda=\sum p_i\lambda_i$ самоконтрагредиентно. Если старший коэффициент Λ четен, то ортогональность Λ была обнаружена уже ранее. Если же p_1 нечетен, то разность $\Lambda-\Lambda_{m+1}=\Lambda'$ есть вес некоторого неприводимого представления. Старший коэффициент Λ' четен, значит, Λ' ортогонально. Кронекеровское произведение представления Λ' на Λ_{m+1} ортогонально и содержит в качестве своей высшей неприводимой части представление веса Λ. Отсюда, как и выше, заключаем, что Λ ортогонально. Сходные рассуждения показывают, что для $m=2k$ самоконтрагредиентные представления с четным старшим коэффициентом ортогональны, с нечетным — симплектичны. Следовательно,

Если $n\equiv1 \pmod 4$, то самоконтрагредиентные неприводимые представления группы $\mathfrak{A}_n$, веса которых имеют четный старший коэффициент, ортогональны, — нечетный старший коэффициент — симплектичны. Для остальных значений n все самоконтрагредиентные представления $\mathfrak{A}_n$ ортогональны.

Группы C_n. Главными весами неприводимых представлений C_n являются формы $\Lambda=p_1\lambda_1+\ldots+p_n\lambda_n$, где $p_1\geqslant p_2\geqslant\ldots\geqslant p_n\geqslant 0$ — целые рациональные числа. Перестановки переменных λ_i и изменения их знаков дают снова веса того же самого представления $\mathfrak{D}$. Значит форма $-\Lambda$ является весом $\mathfrak{D}$, и все представления C_n самоконтрагредиентны. Покажем теперь, что

Неприводимое представление C_n ортогонально, если сумма коэффициентов его главного веса четна, и симплектично, если сумма коэффициентов нечетна.

В самом деле, группа C_n, рассматриваемая как свое собственное представление, симплектична. Ее i-кратное альтернирование дает неприводимое представление $C_n^{[i]}$ веса $\Lambda_i=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_i$. Согласно второй лемме этого n°, Λ_i ортогонально для четных i и симплектично для нечетных. Далее пользуемся индукцией. Пусть Λ — данный вес, отличный от $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$. Ищем такое k, $1\leqslant k\leqslant n$, чтобы разность $\Lambda-\Lambda_k= =\Lambda'$ была снова старшим весом некоторого представления. Представление Λ есть наивысшая неприводимая часть кронекеровского произведения Λ' на Λ_k. Если сумма коэффициентов Λ четна, то такие же суммы

у Λ' и Λ_k имеют одинаковую четность. Значит, перемножаемые представления либо оба ортогональны, либо оба симплектичны. В том и другом случае кронекеровское произведение, а значит и Λ, ортогонально. Если сумма коэффициентов Λ нечетна, то сумма коэффициентов одного из весов Λ', Λ_k четна, другого нечетна. Тогда кронекеровское произведение симплектично, а вместе с ним симплектично и Λ.

Группы D_n. Главные веса имеют вид $\Lambda = p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + \ldots + p_n\lambda_n$, где коэффициенты $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_{n-1} \geqslant |p_n|$ либо все целые, либо все полуцелые. Перестановка коэффициентов и изменение знака у любой пары переменных дают снова крайние веса того же представления.

Пусть $n = 2m + 1$. Минимальный вес представления Λ равен $-p_1\lambda_1 - \ldots - p_{n-1}\lambda_{n-1} + p_n\lambda_n$. Значит, контрагредиентное представление имеет вес

$$\Lambda^* = p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + \ldots + p_{n-1}\lambda_{n-1} - p_n\lambda_n.$$

Самоконтрагредиентные веса характеризуются условием $p_n = 0$. Однако представления с такими весами могут быть получены путем расщепления на неприводимые части кронекеровских произведений представлений

$$\Lambda_1 = \lambda_1, \ \Lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_2, \ \ldots, \ \Lambda_{n-1} = \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1}.$$

Представление Λ_i есть i-ое альтернирование основного представления группы D_n. Так как $\mathfrak{D}_n$ ортогональна, то все Λ_i также ортогональны. Отсюда непосредственно заключаем, что все самоконтрагредиентные представления D_{2m+1} ортогональны.

Рассмотрим более сложный случай, когда $n = 2m$. Здесь наряду с Λ форма $-\Lambda$ будет также весом. Поэтому все представления D_{2m} самоконтрагредиентны.

Представления с весами

$$\Lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-2),$$

$$\Lambda_{n-1} = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1} - \lambda_n),$$

$$\Lambda_n = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1} + \lambda_n)$$

образуют базис. Таким образом, расщепляя их кронекеровские произведения, можно получить любое другое неприводимое представление. Представления Λ_i $(i = 1, \ldots, n = 2)$ есть i-ое альтернирование основного представления D_n и поэтому ортогональны. Мы покажем, что остающиеся два так называемые спинорные представления Λ_{n-1}, Λ_n ортогональны для четных m и симплектичны для нечетных m. Согласно n° 5 для этого достаточно знать, симметрической или кососимметрической будет матрица T, преобразующая представление Λ в его контрагредиентное.

Спинорные представления по Картану ([2]) строятся так. Пусть $h_1, \ldots, h_n, e_\alpha, \ldots, e_\gamma$ — канонический базис алгебры D_n. Обозначим через Λ переменную, значениями которой являются формы $\frac{1}{2}(\pm\lambda_1 \pm \lambda_2 \pm$

$\pm \ldots \pm \lambda_n$), где знаков минус нужно брать четное число для представления Λ_n и нечетное для Λ_{n-1} Образуем матрицы

$$A = \| a_{\Lambda, M} \| = \sum a_{\Lambda M} e_{\Lambda M},$$

индексами элементов которых служат формы Λ, $e_{\Lambda M}$ — матричные единицы. Элементу $h = \lambda_1 h_1 + \ldots + \lambda_n h_n$ ставим в соответствие матрицу $H = \sum \Lambda(h) e_{\Lambda\Lambda}$, а элементу e_α матрицу

$$E_\alpha = \sum_{\Lambda} \mu(\Lambda, \alpha) e_{\Lambda, \Lambda - \alpha},$$

где $\mu(\Lambda, \alpha) = 0$, если $\Lambda - \alpha$ не является весом, в противном случае $\mu(\Lambda, \alpha) = \delta_{i+1}\delta_{i+2} \ldots \delta_{j-1}$ для $\alpha = \lambda_i \pm \lambda_j$, $\mu(\Lambda, \alpha) = -\delta_{i+1} \ldots \delta_{j-1}$ для $\alpha = -\lambda_i - \lambda_j$, $\Lambda = \frac{1}{2} \sum \delta_i \lambda_i$. Ищется матрица T, удовлетворяющая соотношениям $TA = -A^* T$, $A \in \mathfrak{D}$. Из условия $TH = -HT$ имеем $M t_{\Lambda M} e_{\Lambda M} = -\Lambda e_{\Lambda M} t_{\Lambda M}$, т. е. $t_{\Lambda M} = 0$ для $\Lambda + M \neq 0$, $t_{\Lambda, -\Lambda} \neq 0$. Соотношение $TE_\alpha = -E^*_\alpha T$ дает

$$\mu(\Lambda + \alpha, \alpha) t_{\Lambda + \alpha, -\Lambda - \alpha} = t_{\Lambda, -\Lambda} \mu(-\Lambda, \alpha).$$

Применяя это равенство k раз, получим

$$t_{\Lambda + \alpha_1 + \ldots + \alpha_k, -\Lambda - \alpha_1 - \ldots - \alpha_k} = (-1)^k \frac{\mu(-\Lambda, \alpha_1)}{\mu(\Lambda + \alpha_1, \alpha_1)} \cdots \frac{\mu(-\Lambda - \alpha_1 - \ldots - \alpha_{k-1}, \alpha_k)}{\mu(\Lambda + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{k-1}, \alpha_k)}. \qquad (t)$$

Положим здесь

$$\Lambda = \frac{1}{2}(\delta_1 \lambda_1 + \ldots + \delta_n \lambda_n),$$

$$\alpha_i = -\delta_{2i-1}\lambda_{2i-1} - \delta_{2i}\lambda_{2i} \quad \left(i = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}\right).$$

Так как согласно определению $\mu(\Lambda, \alpha_i) = 1$, то формула (t) дает $t_{\Lambda, -\Lambda} = (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot t_{-\Lambda, \Lambda}$. Следовательно, T симметрична для четных $\frac{n}{2}$ и кососимметрична для нечетных $\frac{n}{2}$. Теперь, зная характер базисных представлений, легко найти поведение и всех остальных. Окончательный результат следующий:

Все представления групп D_{4k} ортогональны. Неприводимые представления D_{4k+2} с целыми весами ортогональны, с полуцелыми симплектичны. Все самоконтрагредиентные представления групп D_{2m+1} ортогональны.

Группы B_n. Максимальные веса неприводимых представлений суть $\Lambda = p_1\lambda_1 + \ldots + p_n\lambda_n$, где $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_n \geqslant 0$ либо все целые, либо все полуцелые. Перестановки переменных и изменения их знаков дают веса того же представления. Значит, *все представления B_n самоконтрагредиентны*. Их можно получить расщеплением кронекеровских произведений базисных представлений с весами $\Lambda_1 = \lambda_1$, $\Lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_2, \ldots,$

$\Lambda_{n-1}=\lambda_1+\ldots+\lambda_{n-1}$, $\Lambda_n=\frac{1}{2}(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)$. Первые $n-1$ из этих весов являются весами последовательных альтернирований основного представления B_n и поэтому ортогональны. Последнее, спинорное представление строится так же, как соответственное представление Λ_n в предыдущем случае. Из формулы (t), применимой и здесь, видно, что Λ_n будет ортогонально для $n=4k$, симплектично для $n=4k+2$. Если $n=2m+1$, то, полагая в этой формуле

$$\alpha_i=-\delta_{2i-1}\lambda_{2i-1}-\delta_{2i}\lambda_{2i},\quad \alpha_{m+1}=-\delta_n\lambda_n\quad (i=1,2,\ldots,m),$$

где $\Lambda=\frac{1}{2}(\delta_1\lambda_1+\ldots+\delta_n\lambda_n)$, получим снова $t_{-\Lambda,\Lambda}=(-1)^{m+1}t_{\Lambda,-\Lambda}$.

Следовательно, для m четных Λ_n оказывается симплектическим, для m нечетных ортогональным. Отсюда, как и ранее, получаем окончательный результат:

Все представления групп B_{4k}, B_{4k+1} ортогональны. Неприводимые представления B_{4k+1}, B_{4k+2} с целыми весами ортогональны, с полуцелыми симплектичны.

Группа G_2. Максимальными весами являются формы $p_1\lambda_1+p_2\lambda_2+p_3\lambda_3$, $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$, $p_1+p_2+p_3=0$, где p_i — рациональные дроби с знаменателем 3 и с сравнимыми mod 3 числителями, $p_1\geqslant p_2\geqslant p_3$, $p_2\leqslant 0$.

Преобразования

$$\Lambda\to\Lambda-3m_i\lambda_i,$$
$$\Lambda\to\Lambda-(m_i-m_j)(\lambda_i-\lambda_j)$$

дают крайние веса того же представления. Отсюда следует, что $-\Lambda$ также вес представления Λ. Поэтому все представления G_2 самоконтрагредиентны. Представления с весами $\Lambda_1=\frac{2}{3}\lambda_1-\frac{1}{3}\lambda_2-\frac{1}{3}\lambda_3$, $\Lambda_2=\lambda_1-\lambda_2$ образуют базис. Первое из них есть представление степени 7, указанное Картаном в ([1]). Оно имеет инвариантную квадратичную форму и, значит, ортогонально. Второе — присоединенное и, следовательно, также ортогонально. Отсюда в силу теорем n° 5 вытекает, что *все представления G_2 ортогональны.*

Группа F_4. Формы $p_1\lambda_1+p_2\lambda_2+p_3\lambda_3+p_4\lambda_4$, где $p_1\geqslant p_2+p_3+p_4$, $p_1\geqslant p_2\geqslant p_3\geqslant p_4$, p_i — целые или все полуцелые — являются старшими весами неприводимых представлений F_4. Преобразования

$$\Lambda\to\Lambda-2m_i\lambda_i,\quad \Lambda\to\Lambda-(\pm m_i\pm m_j)(\pm\lambda_i\pm\lambda_j),$$
$$\Lambda\to\Lambda-\left(\frac{1}{2}\sum\pm m_i\right)\left(\sum\pm\lambda_i\right)$$

дают снова веса того же представления. Первое преобразование показывает, что наряду с Λ весом является и $-\Lambda$. Таким образом, все представления F_4 самоконтрагредиентны. Базис образуют представления с весами $\Lambda_1=\lambda_1$, $\Lambda_2=\lambda_1+\lambda_2$, $\Lambda_3=\frac{1}{2}(3\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)$, $\Lambda_4=2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$. Первое из них есть представление, указанное Картаном в ([4]), и имеет инвариантную квадратическую форму. Представление Λ_2 — присоединенное и поэтому также ортогонально. Второе альтернирование представ-

ления Λ_1 содержит наивысшую часть с весом Λ_3, а третье альтернирование — часть с весом Λ_4. Так как Λ_1 ортогонально, то Λ_3, Λ_4 также ортогональны, откуда следует, что *все представления F_4 ортогональны*.

Группа E_6. Максимальные веса здесь — формы $p_1\lambda_1+p_2\lambda_2+\ldots+p_6\lambda_6$, где $p_1\geqslant p_2\geqslant\ldots\geqslant p_6$, $p_1+p_2+p_3\leqslant 2(p_4+p_5+p_6)$, p_i-p_j целые, $\frac{1}{3}\sum p_\alpha$ целое. Преобразования

$$\Lambda\to\Lambda-(p_i-p_j)(\lambda_i-\lambda_j),\ \Lambda\to\Lambda+\left(\frac{1}{3}\sum p_\alpha-p_i-p_j-p_k\right)(\lambda_i+\lambda_j+\lambda_k),$$

$$\Lambda\to\Lambda-\frac{1}{3}\sum p_\alpha\cdot\left(\sum\lambda_\alpha\right)$$

дают все крайние веса. Отсюда легко проверить, что наименьший вес представления Λ равен

$$\left(p_6-\frac{1}{3}\sum p_\alpha\right)\lambda_1+\left(p_5-\frac{1}{3}\sum p_\alpha\right)\lambda_2+\ldots+\left(p_1-\frac{1}{3}\sum p_\alpha\right)\lambda_6.$$

Таким образом, контрагредиентное представление имеет вес

$$\Lambda^*=\left(\frac{1}{3}\sum p_\alpha-p_6\right)\lambda_1+\left(\frac{1}{3}\sum p_\alpha-p_5\right)\lambda_2+\ldots+\left(\frac{1}{3}\sum p_\alpha-p_1\right)\lambda_6,$$

и условия самоконтрагредиентности Λ пишутся в виде

$$\frac{1}{3}\sum p_\alpha=p_1+p_6=p_2+p_5=p_3+p_4.$$

Отсюда, в частности, следует, что коэффициенты самоконтрагредиентного представления целые. Фундаментальную систему образуют представления с весами $\Lambda_1=\frac{2}{3}\sum\lambda_\alpha-\lambda_6$, $\Lambda_2=\sum\lambda_\alpha$, $\Lambda_3=\frac{1}{3}\sum\lambda_\alpha+\lambda_1$, $\Lambda_4=\frac{4}{3}\sum\lambda_\alpha-\lambda_5-\lambda_6$, $\Lambda_5=\frac{2}{3}\sum\lambda_\alpha+\lambda_1+\lambda_2$, $\Lambda_6=\sum\lambda_\alpha+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$.

Среди них Λ_1, Λ_3 и Λ_4, Λ_5 взаимно-контрагредиентны, Λ_2, Λ_6 самоконтрагредиентны. Представление Λ_2 — присоединенное, следовательно, ортогональное. Альтернирование $\Lambda_2^{[2]}$ содержит в качестве своей наивысшей части Λ_6, которое, таким образом, тоже ортогонально. Отсюда видно, что *все самоконтрагредиентные представления группы E_6 ортогональны*.

Действительно, единственными самоконтрагредиентными представлениями с $\sum p_\alpha\leqslant 9$ являются Λ_2 и Λ_6, для которых это верно. Пусть теперь Λ самоконтрагредиентно, $\sum p_\alpha>9$ и для низших весов предложение доказано. Если $p_3>p_4$, то $\Lambda-\Lambda_6=\Lambda'$ будет самоконтрагредиентным весом и, значит, ортогональным. Кронекеровское произведение представлений $\Lambda'\times\Lambda_6$ ортогонально и содержит Λ своей главной частью. Следовательно, Λ ортогонально. Если, наконец, $p_3=p_4$, то можно найти такие взаимно-контрагредиентные представления, кронекеровское произведение которых содержит своей высшей частью Λ. Так как произведение контрагредиентных представлений ортогонально, то ортогонально и Λ.

Группа E_7. Старшими весами представлений являются формы $\Lambda = p_1\lambda_1 + \ldots + p_7\lambda_7$, где коэффициенты p_i и $\frac{1}{3}\sum p_\alpha$ либо целые, либо все полуцелые, $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_7$, $p_1 \leqslant \frac{1}{3}\sum p_\alpha \leqslant p_5 + p_6 + p_7$. Преобразования

$$\Lambda \to \Lambda - (p_i - p_j)(\lambda_i - \lambda_j),$$

$$\Lambda \to \Lambda + \left(\frac{1}{3}\sum p_\alpha - p_i - p_j - p_k\right)(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k),$$

$$\Lambda \to \Lambda + \left(\frac{1}{3}\sum p_\alpha - p_i\right)\left(-\sum \lambda_\alpha + \lambda_i\right).$$

позволяют найти все крайние веса. Из этих преобразований можно усмотреть, что вместе с Λ весом того же представления будет и $-\Lambda$. Таким образом, все представления E_7 самоконтрагредиентны. Базис образуют представления с весами $\Lambda_1 = \sum \lambda_\alpha$, $\Lambda_2 = \lambda_1 + \frac{1}{2}\sum \lambda_\alpha$, $\Lambda_3 = \frac{3}{2}\sum \lambda_\alpha$, $\Lambda_4 = \lambda_1 + \lambda_2 + \sum \lambda_\alpha$, $\Lambda_5 = 2\sum \lambda_\alpha - \lambda_6 - \lambda_7$, $\Lambda_6 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \frac{3}{2}\sum \lambda_\alpha$, $\Lambda_7 = 3\sum \lambda_\alpha - \lambda_5 - \lambda_6 - \lambda_7$. Форма Λ_1 является весом присоединенной группы и, следовательно, ортогональна. Форма Λ_2 есть вес особого картановского представления, являющегося симплектическим [см. ([1])]. Из соотношений $\Lambda_2^{[2]} = \Lambda_4 \dot{+} \ldots$; $\Lambda_2^{[3]} = \Lambda_6 \dot{+} \ldots$; $\Lambda_2^{[4]} = \Lambda_7 \dot{+} \ldots$; $\Lambda_1^{[2]} = \Lambda_5 \dot{+} \ldots$; следует, что Λ_4, Λ_5, Λ_7 ортогональны, а Λ_6 симплектично. Остается рассмотреть Λ_3. Пусть $M = \frac{7}{2}\sum \lambda_\alpha - \lambda_6 - \lambda_7$. Тогда из $\Lambda_2^{[5]} = M \dot{+} \ldots$ следует, что M симплектично, а соотношение $\Lambda_3 \times \Lambda_5 = M \dot{+} \ldots$ показывает, что представление Λ_3 должно быть симплектическим. Зная поведение базисных представлений, легко находим, что *неприводимые представления* E_7, *главный вес которых имеет целые коэффициенты, — ортогональны, с дробными коэффициентами — симплектичны.*

Группа E_8. Веса неприводимых представлений даются формами $\Lambda = p_1\lambda_1 + \ldots + p_9\lambda_9$, $\sum p_\alpha = 0$, $\sum \lambda_\alpha = 0$, коэффициенты которых p_α рациональные дроби с знаменателем 3 и с числителями, сравнимыми mod 3, $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_9$, $p_1 + p_8 + p_9 \geqslant 0 \geqslant p_2 + p_3 + p_4$.

Преобразования

$$\Lambda \to \Lambda - (p_i - p_j)(\lambda_i - \lambda_j),$$

$$\Lambda \to \Lambda + (p_i + p_j + p_k)\left(\frac{1}{3}\sum \lambda_\alpha - \lambda_i - \lambda_j - \lambda_k\right)$$

позволяют из наивысшего веса получить все крайние веса. Отсюда находим, что $-\Lambda$ является весом представления Λ. Значит, все представления группы E_8 самоконтрагредиентны.

Базис образуют веса $\Lambda_1 = \lambda_1 - \lambda_9$, $\Lambda_2 = 2\lambda_1 + \lambda_2 - \frac{1}{3}\sum\lambda_\alpha$, $\Lambda_3 = 2\lambda_1 - \lambda_8 - \lambda_9$, $\Lambda_4 = 3\lambda_1 - \frac{1}{3}\sum\lambda_\alpha$, $\Lambda_5 = 3\lambda_1 - \lambda_7 - \lambda_8 - \lambda_9$, $\Lambda_6 = 4\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \frac{2}{3}\sum\lambda_\alpha$, $\Lambda_7 = 4\lambda_1 - \lambda_6 - \lambda_7 - \lambda_8 - \lambda_9$, $\Lambda_8 = 5\lambda_1 - \lambda_5 - \lambda_6 - \lambda_7 - \lambda_8 - \lambda_9$.

Среди них первый вес есть вес присоединенного представления и потому ортогонален. Полагая $M = 7\lambda_1 - \lambda_6 - \lambda_7 - \lambda_8 - \lambda_9 - \frac{1}{3}\sum\lambda_\alpha$, мы из соотношений

$$\Lambda_1^{[2]} = \Lambda_3 \dotplus \ldots; \quad \Lambda_1^{[3]} = \Lambda_5 + \ldots; \quad \Lambda_1^{[4]} = \Lambda_7 + \ldots; \quad \Lambda_1^{[5]} = \Lambda_8 \dotplus \ldots;$$

$$\Lambda_2^{[3]} = \Lambda_8 + \ldots; \quad \Lambda_2^{[2]} = \Lambda_6 \dotplus \ldots; \quad \Lambda_2^{[4]} = M \dotplus \ldots; \quad \Lambda_4 \times \Lambda_7 = M + \ldots$$

последовательно выводим, что все базисные веса E_8 ортогональны, откуда, в свою очередь, вытекает, что *вообще все представления группы E_8 ортогональны*.

n° 7. Полупростые подгруппы классических групп. Все представления полупростых групп в классических группах нами теперь найдены. Это дает возможность определить и все полупростые подгруппы их.

Пусть $\mathfrak{D}$ какое-нибудь линейное представление степени n полупростой группы $\mathfrak{L}$. Ее образ $\mathfrak{D}(\mathfrak{L})$ в полной линейной группе будет одновременно подгруппой группы $\mathfrak{G}$, равной соответственно A_{n-1}, $B_{\frac{n-1}{2}}$, $C_{\frac{n}{2}}$, $D_{\frac{n}{2}}$, в зависимости от четности n и от того, будет ли представление $\mathfrak{D}$ ортогональным или симплектическим. При этом подгруппы, отвечающие неприводимым представлениям, характеризуются особым свойством — они не содержатся ни в одной собственной регулярной подгруппе $\mathfrak{G}$. Ради краткости мы будем называть такие подгруппы неприводимыми.

В начале настоящего параграфа было показано, что классы представлений $\mathfrak{L}$ в $\mathfrak{G}$, переводимые друг в друга внешними автоморфизмами $\mathfrak{L}$, взаимно однозначно соответствуют классам внутренне сопряженных подгрупп $\mathfrak{G}$, изоморфных $\mathfrak{L}$. В частности, классы неприводимых представлений определяют неприводимые подгруппы.

Найдем сначала неприводимые простые подгруппы $\mathfrak{L}$ какой-либо классической группы $\mathfrak{G}$. По предположению, $\mathfrak{L}$ простая и, значит, изоморфна одной из групп A_m, $B_m, \ldots, G_2$. Среди этих групп внешними автоморфизмами обладают только A_m, D_m и E_6 [ср. ([3]), а также ([6])]. За исключением D_4, все они с точностью до внутренних имеют только один внешний автоморфизм, который мы возьмем в картановской канонической форме и обозначим через σ. Пусть неприводимое представление группы $\mathfrak{L}$ имеет вес Λ. Вес представления $L \to \mathfrak{D}(L^\sigma)$, получающегося из $\mathfrak{D}$ с помощью автоморфизма σ, обозначим Λ^σ, вес контрагредиентного представления $\mathfrak{D}^{*-1}$ пусть будет Λ^*. Тогда, принимая во внимание, что вес целиком определяется представлением максимальной регулярной абелевой подгруппы, мы из формул Картана легко усмат-

риваем, что $\Lambda^\sigma = \Lambda^*$. Однако неприводимые представления в A_n, B_n, C_n однозначно характеризуются своими весами, поэтому *неприводимые простые подгруппы B_n, C_n однозначно характеризуются своими весами, а подгруппы A_n — парами взаимно-контрагредиентных весов.*

Для подгрупп групп D_n положение несколько иное. Здесь следует различать подгруппы двух типов: 1) подгруппы, изоморфные A_m, D_m, E_6, и 2) подгруппы, изоморфные остальным простым группам.

Подгруппы второго типа внешних автоморфизмов не имеют, и поэтому их самоконтрагредиентному весу степени $2n$ в группе D_n отвечают в точности два класса сопряженных подгрупп. Что касается подгрупп первого типа, то здесь такому весу могут отвечать иногда один (для четных n), иногда два (для нечетных n) класса сопряженных подгрупп.

Пестрота, вызываемая особым поведением групп D_n, исчезает, если ищутся классы внешне сопряженных подгрупп. Именно, *каждому самоконтрагредиентному весу и каждой паре взаимно-контрагредиентных весов отвечает в точности по одному классу внешне сопряженных подгрупп в классических группах.*

Действительно, группы B_n, C_n внешних автоморфизмов не имеют и для них утверждение совпадает с ранее высказанным. Внешний автоморфизм σ для групп A_n имеет вид $A \to A^{*-1}$. Таким образом каждое представление σ переводит в контрагредиентное. Наконец, σ для групп D_n обозначает преобразование посредством несобственной ортогональной матрицы. В D_n каждому весу отвечают два несопряженных представления, однако оба они переводятся друг в друга автоморфизмом σ, что и требовалось

Чтобы получить все простые группы, а не только неприводимые, достаточно заметить, что всякое представление простой группы распадается в классических группах на неприводимые части. Поэтому простые подгруппы будут характеризоваться системами весов, сумма степеней которых не превосходит степени соответствующей классической группы. Взаимно-контрагредиентные системы определяют один и тот же класс внутренне сопряженных подгрупп в A_n, B_n, C_n и, вообще говоря, два класса в D_n. *Внешне сопряженные простые подгруппы классических групп взаимно однозначно соответствуют парам контрагредиентных систем весов.*

§ 3. Трехчленные простые подгруппы

В предшествующем параграфе были определены полупростые подгруппы классических групп. Таким образом, для решения общей задачи остается найти полупростые подгруппы пяти особых групп. Мы здесь укажем способ для нахождения их простых трехчленных подгрупп. Зная эти подгруппы, в группах G_2 и F_4 легко найти и вообще все полупростые подгруппы. Перечень их здесь прилагается. Что касается подгрупп E_6, E_7, E_8, то этот метод для них требует пересмотра большого числа комбинаций корневых векторов, и они остаются нерассмотренными.

n° 8. Идемпотенты полупростых алгебр Ли. Пусть G—полупростая алгебра Ли. Ради краткости максимальные регулярные абелевы под-

алгебры полупростых подалгебр G мы будем называть идемпотентами G. Максимальные регулярные абелевы подалгебры самой алгебры G будут называться главными идемпотентами G. Известно, что всякий идемпотент G содержится в некотором ее главном идемпотенте и что все главные идемпотенты сопряжены между собой [ср. ([6])]. Следовательно, каждый идемпотент G сопряжен с одним из идемпотентов, лежащих в произвольно выбранном фиксированном главном идемпотенте G.

ТЕОРЕМА 1. *Каждый идемпотент G содержит внутри себя лишь конечное число идемпотентов.*

Доказательство. Так как всякий идемпотент раскладывается в прямую сумму одномерных, то достаточно показать, что главный идемпотент H алгебры G содержит лишь конечное число одномерных идемпотентов. Пусть $h_1, h_2, \ldots, h_n$ — базис H, $\pm\alpha, \pm\beta, \ldots, \pm\gamma$ — корни G, $e_\alpha, e_{-\alpha}, \ldots, e_\gamma, e_{-\gamma}$ — соответственные корневые элементы G и λf — одномерный идемпотент из H. Трехмерная простая подгруппа F, имеющая f своим главным идемпотентом, натягивается элементами f, ε, ε_*, связанными соотношениями

$$[f\varepsilon]=\varepsilon; \quad [f\varepsilon^*]=-\varepsilon^*; \quad [\varepsilon\varepsilon^*]=f. \tag{1}$$

Пусть

$$\varepsilon = f_0 + a_\alpha e_\alpha + \ldots + a_\gamma e_\gamma,$$
$$\varepsilon^* = f_1 + a^*_\alpha e_{-\alpha} + \ldots + a^*_\gamma e_{-\gamma};$$

Из соотношений (1) вытекает

$$f_0 = f_1 = 0, \quad a_\alpha(f\alpha) = a_\alpha, \quad a^*_\alpha(f\alpha) = a^*_\alpha,$$
$$\sum_{\alpha_i-\alpha_j=\gamma} a_{\alpha_i}a^*_{\alpha_j}N_{\alpha_i,\,-\alpha_j} = 0, \tag{2}$$
$$\sum_\alpha a_\alpha a^*_\alpha h_\alpha = f. \tag{3}$$

Таким образом, ε может содержать только члены e_φ, соответствующие корням φ, для которых $(f, \varphi)=1$, а ε^*, — соответственно, только члены $e_{-\varphi}$. Если условиться изображать корневые векторы как векторы пространства H, то в силу соответствия $\alpha \longrightarrow h_\alpha$ будем иметь $(h_\alpha h_\beta) = (\alpha\beta)$, и равенство $(f\varphi)=1$ перейдет в

$$(fh_\varphi) = 1. \tag{4}$$

Условия (3), (4) геометрически означают следующее. Через концы векторов $h_{\varphi_1}, \ldots, h_{\varphi_p}$ проводится гиперплоскость минимального числа измерений, и из начала координат на нее опускается перпендикуляр. Этот перпендикуляр, нормированный так, чтобы выполнялось (4), и есть f. Так как всевозможных комбинаций корневых векторов только конечное число, то и возможных значений f существует лишь конечное множество.

n° 9. Трехчленные простые подалгебры. Пусть мы желаем найти трехчленные простые подалгебры алгебры G. Тогда с точностью до сопряженных мы можем искать лишь те из них, идемпотент которых лежит в фиксированном главном идемпотенте H алгебры G. Далее можно поступать так. Берем произвольную систему корневых векторов

$\varphi_1, \ldots, \varphi_p$, ищем соответствующий перпендикуляр f и составляем систему уравнений (2), (3) с неопределенными a_{φ_i}, $a^*_{\varphi_i}$. Если эта система несовместна, то f не идемпотент. Если же решения существуют, то каждое из них дает трехчленную подгруппу. Мы покажем, что все эти подгруппы сопряжены между собой.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть две трехчленные простые подалгебры имеют общий идемпотент и изоморфны относительно него. Тогда этот изоморфизм может быть продолжен до внутреннего автоморфизма всей алгебры.*

При доказательстве нам потребуется

ЛЕММА. *Пусть f, ε, ε^* и f_1, ε_1, ε_1^*—базисы двух простых трехчленных подалгебр с соотношениями* (1). *Тогда из $f=f_1$, $\varepsilon=\varepsilon_1$ следует $\varepsilon_1^*=\varepsilon^*$.*

Действительно, положим

$$\varepsilon^*-\varepsilon_1^*=u_1, \quad [\varepsilon^* u_1]=u_2, \ \ldots, \ [\varepsilon^* u_k]=u_{k+1}, \ \ldots$$

Имеем $[fu_k]=-ku_k$ и при некотором s должно быть $u_{s+1}=0$. Но

$$[\varepsilon u_{k+1}]=-(1+2+\ldots+k)u_k.$$

Отсюда следует $u_{s+1}=u_s=\ldots=u_2=u_1=0$, что и требовалось.

Переходя к доказательству теоремы 2, заметим следующее. Пусть f— одномерный идемпотент, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ — система всех корней G с $(\varphi f)=1$ и $\psi_1, \ldots, \psi_q$ — все перпендикулярные к f корни G. Тогда, полагая

$$\varepsilon=a_{\varphi_1}e_{\varphi_1}+\ldots+a_{\varphi_p}e_{\varphi_p},$$
$$\varepsilon^*=a^*_{\varphi_1}e_{-\varphi_1}+\ldots+a^*_{\varphi_p}e_{-\varphi_p},$$

мы видим, что любые числа a_{φ_i}, $a^*_{\varphi_i}$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\sum a_{\varphi_i}a^*_{\varphi_i}h_{\varphi_i}=f,\\ &\sum_{\varphi_i-\varphi_j=\psi_k} a_{\varphi_i}a^*_{\varphi_j}N_{\varphi_i,-\varphi_j}=0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

дают трехчленную группу. Общий малый внутренний автоморфизм, оставляющий на месте f, имеет вид

$$\exp t\Big(-\sum t_i h_i+\sum c_{\psi_j}e_{-\psi_j}\Big)\cdot\varepsilon=$$
$$=\varepsilon+t\Big(-\sum_i \varphi_i a_{\varphi_i}e_{\varphi_i}+\sum c_{\psi_j}a_{\varphi_i}N_{-\psi_j,\varphi_i}e_{-\psi_j+\varphi_i}\Big)+\ldots$$

Отсюда, бесконечно малый автоморфизм сообщает координатам ε приращения

$$\begin{aligned} da_{\varphi_1}=&-a_{\varphi_1}u_{11}dt_1-\ldots-a_{\varphi_1}u_{1n}dt_n+a_{\varphi_1+\psi_1}N_{-\psi_1,\varphi_1+\psi_1}dc_{\psi_1}+\\ &+\ldots+a_{\varphi_1+\psi_q}N_{-\psi_q,\varphi_1+\psi_q}dc_{\psi_q} \end{aligned} \tag{6}$$

. . . .

$$\begin{aligned} da_{\varphi_p}=&-a_{\varphi_p}u_{p1}dt_1-\ldots-a_{\varphi_p}u_{pn}dt_n+a_{\varphi_p+\psi_1}N_{-\psi_1,\varphi_p+\psi_1}dc_{\psi_1}+\\ &+\ldots+a_{\varphi_p+\psi_q}N_{-\psi_q,\varphi_p+\psi_q}dc_{\psi_q}. \end{aligned}$$

Условия (5), подробнее записанные, имеют вид

$$\left.\begin{array}{c} a_{\varphi_1} a^*_{\varphi_1} u_{11} + a_{\varphi_2} a^*_{\varphi_2} u_{21} + \ldots + a_{\varphi_p} a^*_{\varphi_p} u_{p1} = f_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{\varphi_1} a^*_{\varphi_1} u_{1n} + a_{\varphi_2} a^*_{\varphi_2} u_{2n} + \ldots + a_{\varphi_p} a^*_{\varphi_p} u_{pn} = f_n, \\ a_{\varphi_1+\psi_1} a^*_{\varphi_1} N_{\varphi_1+\psi_1, -\varphi_1} + a_{\varphi_2+\psi_1} a^*_{\varphi_2} N_{\varphi_2+\psi_1, -\varphi_2} + \ldots + a_{\varphi_p+\psi_1} a^*_{\varphi_p} N_{\varphi_p+\psi_1, -\varphi_p} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{\varphi_1+\psi_q} a^*_{\varphi_1} N_{\varphi_1+\psi_q, -\varphi_1} + a_{\varphi_2+\psi_q} a^*_{\varphi_2} N_{\varphi_2+\psi_q, -\varphi_2} + \ldots + a_{\varphi_p+\psi_q} a^*_{\varphi_p} N_{\varphi_p+\psi_q, -\varphi_p} = 0. \end{array}\right\} \quad (7)$$

Так как структурные константы $N_{\alpha, \beta}$ связаны соотношениями $N_{\alpha+\beta, -\alpha} = -N_{\alpha+\beta, -\beta}$, то матрица коэффициентов при переменных dt_i, dc_{ψ_f} системы (6) и матрица коэффициентов при $a^*_{\varphi_1}, \ldots, a^*_{\varphi_p}$ системы (7) получаются друг из друга путем трансформирования и изменения знака. При тех значениях a_{φ_i}, при которых трехчленная группа существует, вектор ε^* согласно лемме определяется однозначно. Следовательно, ранг матрицы системы (7) при этих значениях a_{φ_i} должен быть равен p. Но тогда и ранг системы (6) также равен p. Это означает, что дифференциалы da_{φ_i} независимы. Таким образом, если $F = \{f, \varepsilon, \varepsilon^*\}$—простая трехчленная подалгебра с идемпотентом f, то корневые векторы $\bar{\varepsilon} = \sum \bar{a}_{\varphi_i} e_{\varphi_i}$ сопряженных с F подалгебр заполняют некоторую окрестность вектора $\varepsilon = \sum a_{\varphi_i} e_{\varphi_i}$ в пространстве $\mathcal{E}$ векторов вида $\lambda_1 e_{\varphi_1} + \ldots + \lambda_p e_{\varphi_p}$. Отсюда непосредственно следует, что все F сопряжены. Действительно, если $\varepsilon = \sum a_{\varphi_i} e_{\varphi_i}$ и $\bar{\varepsilon} = \sum \bar{a}_{\varphi_i} e_{\varphi_i}$—соответствующие корневые векторы двух трехчленных групп с идемпотентом f, то матрицы системы (7), составленные для a_{φ_i} и для $\bar{a}_{\varphi_i}$, —имеют тот же ранг p. Соединим $\bar{\varepsilon}$ и ε непрерывной кривой ε_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\varepsilon_0 = \varepsilon$, $\varepsilon_1 = \varepsilon$ в пространстве $\mathcal{E}$ и так, чтобы ранг системы (7) вдоль этой кривой все время был равен p. Тогда, если для какого-нибудь значения t элемент ε_t есть корневой вектор трехчленной группы F_t, тогда и для всех соседних значений t существуют трехчленные группы и все они сопряжены между собой. С другой стороны, множество тех значений t, при которых F_t существует, замкнуто. Отсюда ясно прежде всего, что F_t существует для всех t, а затем с помощью леммы Гейне — Бореля и то, что все F_t сопряжены.

По существу, эта теорема дает способ для вычисления трехчленных простых групп. Действительно, она показывает, что каждый перпендикуляр f определяет самое большее один класс сопряженных подгрупп. Узнать, существует ли этот класс, можно исследуя совместность системы (7). Однако здесь возможны упрощения. Именно, в ходе доказательства установлено, что если $e = \sum a_{\varphi_i} e_{\varphi_i}$ есть корневой вектор некоторой группы F, то корневым вектором будет и всякая комбинация $e = \sum \bar{a}_{\varphi_i} e_{\varphi_i}$, лишь бы только ранг системы (7) был при этом равен p. Таким образом дело сводится к изучению совместности системы (7) при индивидуальных значениях a_{φ_i}, которые можно выбрать, в частности, так, чтобы система (7) сильно упрощалась. Особо можно отметить случай, когда в G нет корневых векторов, перпендикулярных f. Тогда речь идет

только о системе $\sum a_{\varphi_i} a^*_{\varphi_i} h_{\varphi_i} = f$, которая заведомо совместна. Значит, трехчленная группа в этом случае всегда существует.

В качестве примера рассмотрим группу G_2. Ее корневые векторы суть $\varepsilon_i - \varepsilon_j, \pm(\varepsilon_i + \varepsilon_j - 2\varepsilon_k)$, $i, j, k = 1, 2, 3$. С точностью до зеркальных отражений здесь существуют четыре перпендикуляра, которые должны быть опущены из начала координат на линии, соединяющие концы векторов. Из них перпендикуляры на линии, соединяющие конец вектора $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2\varepsilon_3$ с концом вектора $2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3$ и конец вектора $\varepsilon_1 - \varepsilon_3$ с концом $\varepsilon_3 - \varepsilon_{23}$ трехчленных подгрупп не дают, а остальные два дают. Присоединяя к ним еще две регулярные трехчленные группы $\{e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}, e_{-\varepsilon_1+\varepsilon_2}\}$, $\{e_{2\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3}, e_{-2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}\}$, получим таким образом всего 4 класса сопряженных трехчленных простых подгрупп G_2. Полупростые подалгебры ранга 2 регулярны, это $\{e_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}, e_{\varepsilon_2-\varepsilon_1}, e_{\varepsilon_1+\varepsilon_2-2\varepsilon_3}\}$ и $\{e_{\varepsilon_1+\varepsilon_2-2\varepsilon_3}, e_{-\varepsilon_1-\varepsilon_2+2\varepsilon_3}, e_{2\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3}\}$.

В качестве следующего примера вычислим простые подгруппы F_4. Корневые векторы F_4 суть $\pm\varepsilon_i, \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$, $\frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$. Беря всевозможные комбинации этих векторов по 2, 3, 4 и опуская перпендикуляры h из начала координат на гиперплоскости, проходящие через их концы, мы с точностью до зеркальных отражений получим 24 таких перпендикуляра. Из них нужно отобрать те, которые на самом деле дают трехчленные группы. Часть перпендикуляров можно сразу отбросить, если обратить внимание на то, что корневые элементы F_4 являются весовыми векторами того представления искомой трехчленной группы, которое содержится в регулярном представлении F_4. Так как проекции корней F_4 на h являются весами корневых элементов F_4 в указанном представлении, то эти проекции должны образовать одну или несколько арифметических прогрессий, содержащих нуль и имеющих знаменателем единицу. Другие упрощения получим, если сначала найдем трехчленные подгруппы группы B_4, содержащейся в F_4. Окончательно остаются следующие 14 перпендикуляров:

$$h_1 = \varepsilon_1, \qquad h_6 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3, \qquad h_{11} = \frac{1}{2}\varepsilon_1,$$

$$h_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \quad h_7 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3), \quad h_{12} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + 8\varepsilon_4),$$

$$h_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \qquad h_8 = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3, \qquad h_{13} = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 + 8\varepsilon_4,$$

$$h_4 = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2, \quad h_9 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + 4\varepsilon_4), \quad h_{14} = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + 3\varepsilon_4.$$

$$h_5 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad h_{10} = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 + 4\varepsilon_4,$$

Вычислениями убеждаемся, что все эти h_i действительно соответствуют трехчленным подгруппам. Эти подгруппы не могут быть сопряженными, так как проекции корней F_4 на h образуют различные системы. Первые 10 из этих подгрупп можно взять содержащимися в B_4.

Чтобы найти простые подгруппы ранга 2, нужно из h_i строить корневые звезды. Таких звезд, удовлетворяющих дополнительному условию, что идемпотент искомой группы содержится в выбранном идемпотенте F_4, получается только 4. Вычислениями легко обнаруживается, что эти звезды действительно дают простые подгруппы. Эти подгруппы следующие:

$$\{e_1, e_{1'}, e_{1234}\}; \quad \{e_{12}, e_{1'2'}, e_{13}\};$$

$$\{e_1, e_{1'}, e_{12}\}; \quad \left\{e_1+e_{23}; 2e_{1'}+e_{2'3'}; e_2+e_{13'}+e_{24}+\frac{3}{2}e_{24'}\right\}.$$

Простые группы ранга 3 и 4 регулярны и находятся непосредственно *.

Поступило
15 VIII 1943

ЛИТЕРАТУРА

[1] Cartan É., Sur la structure des groupes des transformations finis et continus, Thèse, 2 éd., Paris, Vuibert, 1933.

[2] Cartan É., Les groupes projectives qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane, Bull. Soc. Math. de France, 41 (1913), 53—96.

[3] Cartan É., Le principe de dualité et la théorie des groupes simples et semi-simples, Bull Soc. Math. de France, 49 (1925), 361—374.

[4] Casimir H. und van-der-Waerden B. L., Algebraischer Beweis der vollständigen Reduzibilität der Darstellung halbeinfacher Liescher Gruppen, Math. Ann., 111 (1935), 1—12.

[5] Frobenius G., Über die kogredienten Transformationen der bilinearen Formen. Berl. Sitzungsber., Math.-Phys. Klasse, 1896, 7—16.

[6] Gantmacher F., Canonical representation of automorphisms of a semi-simple Lie group, Мат. сб., 5 (47) : 1 (1939), 101 — 146.

[7] Гантмахер Ф., О трехчленных простых подгруппах полупростых групп Lie, Рефераты Отд. ф.-м. наук АН СССР, Москва, 1940.

[8] Морозов В. В., О примитивных группах, Мат. сб., 5 (47) : 2 (1939), 355 — 390

[9] Морозов В. В., О неполупростых максимальных подгруппах простых групп. Диссертация, Казань, 1943.

[10] Мальцев А. И., К теории групп Lie в целом.

[11] Weyl H., Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen, Math. Zeitschr., I — 23 (1925), 271—309; II — 24 (1925).

[12] Whitehead J. H. C., On the decomposition of an infinitesimal group, Proc. Camb. Phil. Soc., 32 (1936), 229—237.

A. MALCEV. ON SEMI-SIMPLE SUBGROUPS OF LIE GROUPS

SUMMARY

The following theorems are proved in § 1:

1° Every two maximal semi-simple subgroups of a Lie group $\mathfrak{G}$ are conjugated in $\mathfrak{G}$.

2° Let $\mathfrak{H}$ be a maximal semi-simple subgroup of a Lie group $\mathfrak{G}$ and let $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ be semi-simple subgroups of $\mathfrak{H}$ conjugated in $\mathfrak{G}$. Then $\mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_2$ are conjugated in $\mathfrak{H}$.

3° The problem of construction of all Lie groups with a given radical R is equivalent to the problem of finding of all semi-simple subgroups of the maximal semi-simple group of automorphisms of R.

Orthogonal and symplectic representations of semi-simple Lie groups are studied in § 2. This gives the classification of all semi-simple subgroups in four infinite series of classical groups. Semi-simple subgroups of G_2 and F_4 are calculated in § 3.

The main results of this paper are published in C. R. URSS [XXXVI : 2 (1942) and XLI : 8 (1943)].

---

* Группы указаны своими производящими элементами. Для краткости положено $e_{\varepsilon_1}=e_1$, $e_{-\varepsilon_1}=e_{1'}$, $e_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}=e_{12}$ и т. д.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 8 (1944), 161—180 Série mathématique

С. М. ЛОЗИНСКИЙ

О СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИИ К ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В работе дается улучшение результата Radó и Beckenbach'a, относящегося к изопериметрическому неравенству для кривых на поверхностях неположительной гауссовой кривизны.

Известен следующий классический результат. Пусть C — плоская спрямляемая кривая Jordan'a, D — область, ограниченная кривой C l — длина кривой C, a — площадь области D. Тогда

$$a \leqslant \frac{l^2}{4\pi} \tag{1}$$

и знак равенства имеет место только если C круг. Carleman [2] и Beckenbach [3]* доказали**, что неравенство (1) остается верным и тогда, когда C — замкнутая простая кривая в пространстве, l — ее длина a — площадь минимальной поверхности, натянутой на эту кривую. Знак равенства попрежнему имеет место только если C есть круг, а минимальная поверхность — плоскость***.

Beckenbach и Radó [6] доказали неравенство (1) и для того случая когда C есть гладкая кривая, лежащая на трижды непрерывно дифференцируемой поверхности S, гауссова кривизна K которой $\leqslant 0$, а D — область на S, ограниченная кривой C. Знак равенства имеет место только в том случае, когда $K \equiv 0$ в D и C — геодезический круг.

Результат Beckenbach'a и Radó оставляет желать лучшего в двух отношениях. Во-первых, гауссова кривизна K зависит только от первых и вторых производных координатных функций. Поэтому требование тройной дифференцируемости поверхности представляется искусственным и вызванным не существом дела, а методом доказательства. Во-вторых,

* Цифры в скобках относятся к списку литературы, помещенному в конце работы.

** В этом введении я сознательно не даю точных формулировок теорем. Такие формулировки даны ниже в тексте.

*** Carleman доказал теорему в предположении, что C есть аналитическая кривая, Beckenbach исследовал общий случай.

требование гладкости кривой C также представляется искусственным (см. цитированную выше классическую изопериметрическую теорему и результат Carleman'a — Beckenbach'a). Желательно доказать теорему Beckenbach'a — Radó в предположении, что поверхность S дважды непрерывно дифференцируема, а C — любая спрямляемая кривая на ней. В настоящей работе я имею в виду доказать теорему Beckenbach'a — Radó при указанных только что предположениях, а также уточнить некоторые другие теоремы названных авторов. Метод исследования таков же, как и в работах Beckenbach'a и Radó; он основан на связи между субгармоническими функциями и поверхностями неположительной гауссовой кривизны, открытой названными авторами.

§ 1. Некоторые определения и предварительные сведения

Пусть $p(z)=p(u+iv)=p(u, v)$ вещественная функция, определенная в области D плоскости uv. Будем говорить, что функция $p(z)$ принадлежит в области D классу PL, если $p(z)\equiv 0$ в D или если выполнены одновременно следующие два условия:

1° $0\leqslant p(z)<+\infty$ в D;

2° $\log p(z)$ есть функция субгармоническая в D.

При этом мы придерживаемся того определения субгармонической функции, которое дано в книге Radó «Subharmonic functions». Определение функции класса PL, данное только что, не совпадает с определением Radó лишь в том отношении, что функцию $p(z)\equiv 0$ Radó не причисляет к классу PL.

Пусть функция $f(z)$ регулярна при $|z|<1$. Мы будем говорить, что функция $f(z)$ принадлежит классу H_δ $(\delta>0)$, если существует такое $C>0$, что

$$\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^\delta\, d\theta\leqslant C \quad (0\leqslant r<1).$$

По поводу свойств функций класса H_δ см. Привалов ([7]).

В дальнейшем часто придется ссылаться на две теоремы из теории функций комплексного переменного, принадлежащие, соответственно, Fejér'y и F. Riesz'y и Carleman'y. Для удобства ссылок приводим полностью текст этих теорем.

ТЕОРЕМА (Fejér'a — F. Riesz'a). *Пусть функция $f(z)$ регулярна при $|z|<1$ и принадлежит классу H_δ для некоторого $\delta>0$. Тогда при всех θ, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$*

$$\int_{-1}^{1}|f(\rho e^{i\theta})|^\delta d\rho\leqslant\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}|f(e^{it})|^\delta dt,$$

и если хотя бы для одного θ имеет место знак равенства, то $f(z)\equiv 0$.

При этом константа $\frac{1}{2}$ не может быть уменьшена.

ТЕОРЕМА (Carleman'a). *Пусть функция $f(z)$ регулярна при $|z|<1$ и принадлежит классу H_1. Тогда*

$$\iint\limits_{|z|<1} |f(re^{i\theta})|^2 r\,dr\,d\theta \leqslant \frac{1}{4\pi}\left[\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|\,d\theta\right]^2$$

и знак равенства имеет место только, если $f(z)=F'(z)$, где $F(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ есть функция, регулярная в $|z|\leqslant 1$.

Заметим, что Carleman доказывает свою теорему в предположении, что функция $f(z)$ регулярна при $|z|\leqslant 1$. Однако посредством простых дополнительных рассуждений получим теорему и в только что указанной форме.

Пусть $p(z)$ — функция класса PL в круге $|z|<1$, причем для некоторого $\delta>0$

$$\int_0^{2\pi} p^\delta(re^{i\theta})\,d\theta \leqslant C \quad (0\leqslant r<1). \tag{2}$$

Тогда по известной теореме Littlewood'a почти для всех θ функция $p(z)$ стремится к конечному пределу $p(e^{i\theta})$, когда точка z стремится к точке $e^{i\theta}$ изнутри единичного круга по любому некасательному пути. В силу теоремы Fatou функция $p(e^{i\theta})$ суммируема со степенью δ на интервале $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. Известно ([8]), что из условия (2) следует

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi} p^\delta(re^{i\theta})\,d\theta = \int_0^{2\pi} p^\delta(e^{i\theta})\,d\theta. \tag{3}$$

Если функция $p(z)$ класса PL удовлетворяет условию (2), то будем говорить, что функция $p(z)$ принадлежит классу $\mathfrak{H}_\delta$. В силу общих теорем о предельном переходе под знаком интеграла, для всякой функции $p(z)$ класса $\mathfrak{H}_\delta$

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi} |p(e^{i\theta})-p(re^{i\theta})|^\delta\,d\theta = 0. \tag{4}$$

§ 2. Некоторые теоремы о субгармонических функциях

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $p(z)$ — функция субгармоническая в $|z|<1$, не равная тождественно нулю и принадлежащая классу $\mathfrak{H}_\delta$. Тогда:*

1° *$\log p(e^{i\theta})$ суммируем на интервале $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$;*

2° *при $r<1$*

$$\log p(re^{i\theta}) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log p(e^{it})\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}\,dt; \tag{5}$$

3° *найдется функция $f(z)$, регулярная в круге $|z|<1$, принадлежащая классу H_δ и притом такая, что*

$$p(z)\leqslant|f(z)| \text{ при } |z|<1 \text{ и } p(z)=|f(z)| \tag{6}$$

почти везде при $|z|=1$.

Замечание. Утверждения 1° и 2° известны [см. ([7])].

Чтобы доказать 3°, положим

$$h(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log p(e^{it})\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}dt. \tag{7}$$

В силу утверждений 1° и 2° $h(z)$ есть функция, гармоническая в $|z|<1$ и такая, что

$$p(z)\leqslant e^{h(z)} \quad (|z|<1). \tag{8}$$

Пусть $h^*(z)$—гармоническая функция, сопряженная с $h(z)$. Положим

$$f(z)=e^{h(z)+ih^*(z)}.$$

Ясно, что $f(z)$ регулярна при $|z|<1$, причем

$$|f(z)|=e^{h(z)} \tag{9}$$

С помощью (7), (8) и неравенства Jensen'а находим

$$|f(re^{i\theta})|^\delta=e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log p^\delta(e^{it})\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}dt}\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}p^\delta(e^{it})\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}dt$$

Отсюда

$$\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^\delta d\theta\leqslant\int_0^{2\pi}p^\delta(e^{it})dt \quad (0\leqslant r<1)$$

и, следовательно, $f(z)\in H_\delta$. В силу (7), (8) и (9) заключаем, что $f(z)$ удовлетворяет всем условиям теоремы.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $p(z)$—*функция класса* PL *в* $|z|<1$ *и* $p(z)\in\mathfrak{H}_\delta$. *Тогда*

$$\int_{-1}^{1}p^\delta(\rho e^{i\theta})d\rho\leqslant\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}p^\delta(e^{i})dt \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi), \tag{10}$$

причем если хоть для одного θ *в формуле* (10) *имеет место знак равенства, то* $p(z)\equiv 0$. *Константу* $\frac{1}{2}$ *нельзя уменьшить.*

Доказательство. Пусть $p(z)\not\equiv 0$. По теореме 1 найдется функция $f(z)$ класса H_δ, удовлетворяющая условиям (6). Так как $f(z)\not\equiv 0$, то, применяя теорему Fejér'a—Riesz'a, находим

$$\int_{-1}^{1}p^\delta(\rho e^{i\theta})d\rho\leqslant\int_{-1}^{1}|f(\rho e^{i\theta})|^\delta d\rho<\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}|f(e^{it})|^\delta dt=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}p^\delta(e^{it})dt,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Для случая, когда $p(z)$ непрерывна в $|z|\leqslant 1$, неравенство (10) другим методом доказал Beckenbach ([4]). Метод Beckenbach'a не позволяет, как это указывает и его автор, решить вопрос о знаке равенства в (10).

Следствие (из теоремы 1). Если $p(z)$ ограничена и принадлежит классу PL в $|z|<1$ (в частности, если $p(z)$ непрерывна в $|z|\leqslant 1$ и класса PL в $|z|<1$) и если $p(e^{i\theta})=0$ для множества значений θ положительной меры, то $p(z)\equiv 0$.

Это — обобщение одной теоремы Beckenbach'a — Radó [см. ([5])].

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $p(z)$ — *функция класса* PL *в* $|z|<1$ *и пусть на единичном круге существует множество* E *значений* θ *положительной*

меры такое, что $p(z)\to 0$, *когда* $z\to e^{i\theta}\in E$ *изнутри единичного круга по любому некасательному пути. Тогда* $p(z)\equiv 0$.

Это — обобщение известной «теоремы единственности» Привалова.

Теорема 3 доказывается с помощью указанного выше следствия из теоремы 1 так же, как теорема Привалова доказывается при помощи «теоремы единственности» Fatou для ограниченных аналитических функций [см. ([7])].

§ 3. Одна теорема о полной вариации гармонической функции вдоль некоторой окружности и ее следствия

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $f(t)$ *вещественная или комплексная функция, имеющая ограниченную вариацию на интервале* $-\pi\leqslant t\leqslant\pi$. *Пусть*

$$u(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}\,dt$$

— гармоническая внутри единичного круга функция, соответствующая $f(t)$. *Пусть* K *— окружность радиуса* <1, *касающаяся единичного круга изнутри в точке* $z=-1$. *Тогда*

$$\operatorname*{var}_{K} u(re^{i\theta})\leqslant \operatorname*{var}_{-\pi\leqslant t\leqslant\pi} f(t), \tag{11}$$

т. е. полная вариация функции $u(re^{i\theta})$ *вдоль окружности* K *не превосходит полной вариации функции* $f(t)$ *на интервале* $[-\pi,\pi]$.

Знак равенства в (11) *имеет место в том и только в том случае, когда* $f(t)\equiv e^{i\alpha}\rho(t)$, *где* α *— вещественное число, а* $\rho(t)$ *— вещественная функция, монотонная на интервале* $[-\pi,\pi]$ *и непрерывная в точках* $t=-\pi$, $t=\pi$.

Если же функция $f(t)$ *не имеет указанного строения, то* $\operatorname*{var}_{K} u(re^{i\theta})$ *постоянно возрастает с возрастанием радиуса окружности* K, *т. е. если* K_1 *и* K_2 *будут двумя окружностями указанного вида, причем радиус* K_1 *меньше радиуса* K_2, *то*

$$\operatorname*{var}_{K_1} u(re^{i\theta})<\operatorname*{var}_{K_2} u(re^{i\theta}).$$

Для доказательства нам потребуется следующая

ЛЕММА 1. *Пусть функция* $F(t)$, *принимающая вещественные или комплексные значения, ограничена при* $-\infty<t<+\infty$ *и имеет на этом интервале ограниченную вариацию. Пусть функция* $U(x,y)$ *определена в полуплоскости* $y>0$ *интегралом Poisson'a*

$$U(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}F(t)\,dt. \tag{12}$$

Тогда для любого $y>0$

$$\operatorname*{var}_{-\infty<x<+\infty} U(x,y)\leqslant \operatorname*{var}_{-\infty<t<+\infty} F(t), \tag{13}$$

т. е. полная вариация функции $U(x,y)$ *на любой бесконечной прямой* $y=\mathrm{const}$ *не превосходит полной вариации функции* $F(t)$ *на* $-\infty<t<$

$<+\infty$. *При этом, если в формуле* (13), *хотя бы для одного* $y>0$, *имеет место знак равенства, то он имеет место и при всех* $y>0$, *и функция* $F(t)$ *имеет вид* $F(t)=e^{i\alpha}\rho(t)$, *где* α — *вещественное число, а* $\rho(t)$ — *вещественная функция, монотонная при* $-\infty<t<+\infty$.

Обратно, если функция $F(t)$ *имеет указанное строение, то в формуле* (13) *при всех* y *имеем равенство.*

Если же функция $F(t)$ *не имеет указанного строения, т* $\underset{-\infty<x<+\infty}{\mathrm{var}}\; U(x,y)$ *постоянно убывает при возрастании* y, *т. е.*

$$\underset{-\infty<x<+\infty}{\mathrm{var}} U(x, y_2)<\underset{-\infty<x<+\infty}{\mathrm{var}} U(x, y_1) \text{ при } 0<y_1<y_2<+\infty.$$

Доказательство. Имеем:

$$U'_x(x, y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-2y(x-t)}{[(x-t)^2+y^2]^2}F(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}dF(t).$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|U'_x(x, y)|\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}dF(t)\right|dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}|dF(t)|=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|dF(t)|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-y)^2+y^2}dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|dF(t)|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{x^2+y^2}dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|dF(t)|\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}\Big|_{-\infty}^{\infty}=\underset{-\infty<t<\infty}{\mathrm{var}} F(t),$$

что доказывает неравенство (13). Остальные утверждения леммы получаются посредством тривиальных рассуждений, которые не считаем нужным приводить.

Доказательство теоремы 4. Формулы

$$w=i\frac{1-z}{1+z},\quad z=\frac{i-w}{i+w} \tag{14}$$

дают конформное отображение круга $|z|<1$ на полуплоскость $\mathfrak{J}(w)>0$ причем окружность K переходит в прямую $\mathfrak{J}(w)=\mathrm{const}$. Положим $w=x+iy$, $z=re^{i\theta}$ и

$$U(x, y)=u\left(\frac{i-w}{i+w}\right),\quad \mathfrak{J}(w)>0;$$

$$F(t)=f\left(\operatorname{arc}\frac{i-t}{i+t}\right) \text{ при } -\infty<t<+\infty.$$

Тогда

$$U(x, y)=u\left(\frac{i-w}{i+w}\right)=u(z)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(t)\frac{y}{(x-t)^2+y^2}dt$$

и, следовательно,

$$\underset{K}{\mathrm{var}}\, u(z)=\underset{-\infty<x<+\infty}{\mathrm{var}} U(x, y)\leqslant\underset{-\infty<t<+\infty}{\mathrm{var}} F(t)\leqslant\underset{-\pi<t<\pi}{\mathrm{var}} f$$

что доказывает неравенство (11). Остальные утверждения теоремы 4 легко следуют из соответствующих утверждений леммы 1.

Дадим некоторые приложения теоремы 4.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть функция $f(z)$ регулярна при $|z| < 1$ и принадлежит классу H_δ. Пусть K — окружность, лежащая в круге $|z| \leqslant 1$, но не совпадающая с единичной окружностью. Тогда*

$$\int_K |f(z)|^\delta |dz| \leqslant \int_{|z|=1} |f(z)|^\delta |dz| \tag{15}$$

Знак равенства в (15) *имеет место в том и только в том случае, когда* $f(z) \equiv 0$.

Доказательство. Теорема известна для случая, когда K окружность, концентрическая с единичной окружностью. Элементарными рассуждениями (конформное отображение) получим отсюда теорему для случая, когда круг K лежит в открытом круге $|z| < 1$. Отсюда предельным переходом получим неравенство (15) и для случая, когда окружность K касается единичного круга $|z| = 1$ изнутри. Однако при таком доказательстве остается открытым вопрос о знаке равенства в (15), если K касается единичного круга. Поэтому пойдем другим путем. Можно прежде всего считать, что $\delta = 1$, так как случай $\delta \neq 1$ сводится к этому посредством элементарных рассуждений. Далее, можно считать, что окружность K касается единичной окружности в точке $z = -1$. Тогда, полагая

$$F(z) = \int_0^z f(\zeta)\, d\zeta, \tag{16}$$

видим, что функция $F(z)$ регулярна в $|z| < 1$, непрерывна в $|z| \leqslant 1$ и имеет на круге $|z| = 1$ ограниченную вариацию (больше того, как известно, $F(z)$ абсолютно непрерывна при $|z| = 1$). Применяя теорему 4, получаем

$$\int_K |f(z)|\, |dz| = \underset{K}{\mathrm{var}}\, F(z) \leqslant \underset{|z|=1}{\mathrm{var}}\, F(z) = \int_{|z|=1} |f(z)|\, |dz|. \tag{17}$$

Если $f(z) \not\equiv 0$, то знак равенства в (17) невозможен, так как тогда функция $F(z)$, определенная формулой (16), не может на единичной окружности представляться формулой $F(e^{it}) = e^{i\alpha}\rho(t)$, где α и $\rho(t)$ удовлетворяют условиям теоремы 4.

Из теорем 1 и 5 легко следует

ТЕОРЕМА 6. *Пусть функция $p(z)$ принадлежит классу $\mathfrak{H}_\delta$ при $|z| < 1$ и K — окружность, лежащая в круге $|z| \leqslant 1$ и не совпадающая с единичной окружностью. Тогда*

$$\int_K p^\delta(z) |dz| \leqslant \int_{|z|=1} p^\delta(z) |dz|,$$

и знак равенства имеет место только если $p(z) \equiv 0$.

Пусть Г — аналитическая кривая, лежащая в плоскости xy. Назовем ([9]) полным вращением этой кривой полную вариацию при обходе кривой Г угла, который касательный вектор к кривой образует с положительным направлением оси абсцисс. Полное вращение очевидно $\geqslant 2\pi$; оно равно 2π в том и только в том случае, когда кривая Г выпукла. Полное вращение кривой Г обозначим через $T(\Gamma)$.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть функция $w=f(z)$ отображает взаимно однозначно и конформно круг $|z|<1$ на внутренность аналитической кривой Г, лежащей в w-плоскости. Пусть K—окружность радиуса <1, касающаяся единичного круга изнутри, и пусть Γ^* — образ круга K при отображении $w=f(z)$.*

Тогда:

1° если кривая Г выпукла, то полное вращение кривой Γ^* равно полному вращению кривой $\Gamma(=2\pi)$, т. е. кривая Γ^* тоже выпукла;

2° если кривая Г не выпукла, то полное вращение кривой Γ^* меньше полного вращения кривой Г, но больше 2π:

$$2\pi < T(\Gamma^*) < T(\Gamma)$$

(т. е. кривая Γ^* «более выпукла», чем Г, но все же не выпукла).

Замечание. Утверждение 1° известно для случая, когда круг K лежит внутри единичного и концентричен с единичным ([9]). С помощью сказанного в ([9]) конформным отображением и предельным переходом легко докажем теорему, с заменой в утверждении 2° слова «меньше» на «меньше или равно» и слова «больше» на слова «больше или равно», т. е. докажем, что $2\pi \leqslant T(\Gamma^*) \leqslant T(\Gamma)$.

Доказательство. Можно считать, что окружность K касается единичного круга в точке $z=-1$. Пусть $\varphi=\varphi(z)$ есть угол, который образует с полуосью $\Re(w)>0$ касательный вектор к кривой Г, проведенный в точке $w=f(z)$, и пусть $\psi=\psi(z)$ имеет аналогичное значение для кривой Γ^*. Тогда легко видеть, что [ср. ([9])]

$$\begin{aligned}\varphi&=\Im\log[(1+z)^2 f'(z)]+C_1\\ \psi&=\Im\log[(1+z)^2 f'(z)]+C_2\end{aligned}\quad (z\neq -1),$$

где C_1 и C_2 — константы. Кроме того, ясно, что кривая Г (соответственно, Γ^*) будет выпуклой в том и только в том случае, если угол $\varphi(z)$ [соответственно, $\psi(z)$] изменяется монотонно, когда z описывает окружность $|z|=1$ (соответственно, окружность K). Так как функция

$$\Im\log[(1+z)^2 f'(z)]$$

гармонична при $|z|<1$ и имеет ограниченную вариацию при $|z|=1$, то наша теорема следует из теоремы 4.

ТЕОРЕМА 8. *Пусть функция $w=f(z)$ отображает круг $|z|<1$ на внутренность спрямляемой кривой Jordan'a — Г, лежащей в w-плоскости. Пусть K — окружность такая, как в теореме 5, и пусть Γ^* — образ окружности K при отображении $w=f(z)$. Тогда длина кривой Γ^* меньше длины кривой Г.*

Доказательство. Как известно, функция $f'(z)$ принадлежит классу H_1 и длина кривой Γ равна

$$\int_{|z|=1} |f'(z)|\,|dz|,$$

а длина кривой Γ^* равна

$$\int_K |f'(z)|\,|dz|.$$

Наше утверждение следует теперь из теоремы 5. Рассуждая, как в начале доказательства теоремы 5, мы могли бы доказать только, что Γ^*_a не длиннее, чем Γ.

В следующем параграфе будет дано некоторое обобщение теоремы 8.

§ 4. Приложение к теории поверхностей неположительной гауссовой кривизны

Пусть $\mathfrak{G}$ — область в плоскости uv и пусть функции

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \tag{18}$$

определены в области $\mathfrak{G}$ и имеют там непрерывные частные производные первых двух порядков. Тогда мы говорим, что уравнения (18) определяют поверхность S класса C''. Если $EG - F^2 > 0$ в области $\mathfrak{G}$, где E, F, G — коэффициенты первой квадратичной формы Гаусса, то мы говорим, что поверхность S регулярна. Если в $\mathfrak{G}$

$$E = G \quad \text{и} \quad F = 0,$$

то говорим, что поверхность S задана изотермически. Всюду далее, имея дело с поверхностями, заданными изотермически, будем писать

$$E = G = \lambda.$$

ЛЕММА 2. *Пусть уравнения* (18) *определяют регулярную поверхность класса C'', заданную изотермически. Пусть C — произвольная гладкая кривая Jordan'a, лежащая вместе с ограниченной ею областью D в $\mathfrak{G}$. Тогда*

$$\iint_D K\lambda\, du\, dv = -\frac{1}{2}\int_C \frac{\lambda_n}{\lambda}\, ds,$$

где K — гауссова кривизна поверхности, ds — дифференциал дуги кривой C, а λ_n — производная от λ в направлении внешней нормали к C.

Доказательство. Пусть вообще $\mathfrak{G}'$ — некоторая область, лежащая вместе со своей границей $\mathfrak{B}'$ в $\mathfrak{G}$ и $f(u, v)$ — функция, определенная в $\mathfrak{G}$ и имеющая там непрерывные частные производные первых k порядков ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Пусть $r > 0$ есть столь малое число, что замкнутый круг радиуса r с центром в произвольной точке множества $\mathfrak{G}' + \mathfrak{B}'$ лежит в $\mathfrak{G}$. Положим

$$A(f; u, v; r) = \frac{1}{\pi r^2}\iint_{\xi^2+\eta^2<r^2} f(u+\xi, v+\eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Нам потребуются следующие, хорошо известные, свойства функций $A(f; u, v; r)$, доказательства которых можно найти, например, у Radó ([10]):

(1) $A(f; u, v; r)$ есть функция от u, v, определенная на некотором открытом множестве, содержащем $\mathfrak{S}'+\mathfrak{B}'$ внутри себя, и имеющая на этом множестве непрерывные частные производные первых $k+1$ порядков.

(2) Когда $r \to 0$, то функция $A(f; u, v; r)$ и все ее частные производные до порядка k включительно стремятся равномерно в $\mathfrak{S}'+\mathfrak{B}'$ к функции $f(u, v)$ и ее соответственным частным производным. Пусть теперь уравнения (18) представляют некоторую регулярную поверхность класса C'''. Полагая $W=\sqrt{EG-F^2}$ и применяя классическую теорему Гаусса, находим

$$KW = \frac{1}{W^3}\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}G_{uu}+F_{uv}-\frac{1}{2}E_{vv} & \frac{1}{2}E_u & F_u-\frac{1}{2}E_v \\ F_v-\frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} -$$

$$-\frac{1}{W^3}\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix} =$$

$$=\frac{F_{uv}}{W}-\frac{1}{2}\frac{G_{uu}}{W}-\frac{1}{2}\frac{E_{vv}}{W}+\frac{1}{4}\alpha+\frac{1}{4}\beta,$$

где

$$\alpha=\{G(E_uG_u+E_v^2)+E(E_vG_v+G_u^2)\}\frac{1}{W^3},$$

$$\beta=\frac{1}{W^3}\{F(E_uG_v-E_vG_u)-2F(F_uG_u+F_vE_v-2FF_uF_v)-2GE_uF_v-2EF_uG_v\}.$$

Отсюда

$$\iint\limits_D KW\,du\,dv=\iint\limits_D \frac{F_{uv}}{W}du\,dv-\frac{1}{2}\iint\limits_D \frac{G_{uu}}{W}du\,dv-\frac{1}{2}\iint\limits_D \frac{E_{vv}}{W}du\,dv+$$

$$+\frac{1}{4}\iint\limits_D \alpha\,du\,dv+\frac{1}{4}\iint\limits_D \beta\,du\,dv=\int\limits_C \frac{F_v}{W}dv+\iint\limits_D \frac{F_vW_u}{W^2}du\,dv+$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{E_v}{W}du-\frac{1}{2}\int\limits_C \frac{G_u}{W}dv-\frac{1}{2}\iint\limits_D \frac{E_vW_v+G_uW_u}{W^2}du\,dv+$$

$$+\frac{1}{4}\iint\limits_D \alpha\,du\,dv+\frac{1}{4}\iint\limits_D \beta\,du\,dv. \tag{19}$$

Пусть теперь функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ удовлетворяют условиям леммы. Положим

$$\tilde{x}(u, v)=A\left(x; u, v; \frac{1}{n}\right), \quad \tilde{y}(u, v)=A\left(y; u, v; \frac{1}{n}\right),$$

$$\tilde{z}(u, v)=A\left(z; u, v; \frac{1}{n}\right).$$

Функции $\tilde{x}(u, v)$, $\tilde{y}(u, v)$, $\tilde{z}(u, v)$, очевидно, зависят от n (хотя мы неснабдили их соответствующим индексом). Ясно, что при всех доста-

точно больших целых n функции $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ определены в некоторой области $\mathfrak{G}'$, содержащей $D+C$ внутри себя, и поверхность

$$x=\tilde{x}(u, v), \quad y=\tilde{y}(u, v), \quad z=\tilde{z}(u, v) \tag{20}$$

— регулярная поверхность класса C'''. Пусть $\tilde{E}$, $\tilde{F}$, $\tilde{G}$ — коэффициенты Гаусса этой поверхности и $\tilde{W}=\sqrt{\tilde{E}\tilde{G}-\tilde{F}^2}$. Тогда, очевидно,

$$\tilde{E} \to \lambda, \quad \tilde{G} \to \lambda, \quad \tilde{E}_u \to \lambda_u, \quad \tilde{G}_u \to \lambda_u, \quad \tilde{E}_v \to \lambda_v, \quad \tilde{G}_v \to \lambda_v,$$

$$\tilde{F} \to 0, \quad \tilde{F}_u \to 0, \quad \tilde{F}_v \to 0, \quad \tilde{W} \to \lambda, \quad \tilde{W}_u \to \lambda_u, \quad \tilde{W}_v \to \lambda_v, \quad \tilde{K} \to K$$

равномерно в $D+C$. Написав для поверхности (20) формулу (19) и полагая $n \to \infty$, получим

$$\iint_D K\lambda\, du\, dv = -\frac{1}{2}\int_C \frac{\lambda_u\, dv - \lambda_v\, du}{\lambda} = -\frac{1}{2}\int_C \frac{\lambda_n}{\lambda}\, ds,$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 3. *Пусть функция $\lambda(u, v)$ определена в области $\mathfrak{G}$ плоскости uv и имеет там непрерывные частные производные первого порядка. Тогда для того, чтобы $\lambda(u, v)$ была субгармонической в $\mathfrak{G}$, необходимо и достаточно, чтобы для любой гладкой кривой Jordan'а C, лежащей вместе с ограниченной ею областью D в $\mathfrak{G}$, выполнялось неравенство*

$$\int_C \lambda_n\, ds \geqslant 0, \tag{21}$$

где λ_n — производная от λ в направлении внешней нормали к C.

Доказательство. Допустим сперва, что λ имеет в $\mathfrak{G}$ непрерывные частные производные первых двух порядков. Тогда для всякой области D, ограниченной гладким контуром C и лежащей вместе с этим контуром в $\mathfrak{G}$,

$$\iint_D \Delta\lambda\, du\, dv = \int_C \lambda_n\, ds,$$

где $\Delta\lambda$ — оператор Лапласа. Теперь справедливость леммы вытекает из следующей известной теоремы: если $\lambda(u, v)$ имеет в области $\mathfrak{G}$ непрерывные частные производные первых двух порядков, то для того, чтобы λ была субгармонической в $\mathfrak{G}$, необходимо и достаточно выполнение условия $\Delta\lambda \geqslant 0$ в $\mathfrak{G}$.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть контур C удовлетворяет поставленным условиям. Обозначим через $C_{x,y}$ контур, полученный из C трансляцией на вектор, проекции которого на оси координат суть x, y. Пусть, далее, $\mathfrak{G}'$ — некоторая односвязная область, лежащая вместе со своей границей в $\mathfrak{G}$ и содержащая C внутри себя. При всех достаточно малых $r>0$ функции $A(\lambda; u, v; r)$ определены в $\mathfrak{G}'$ и имеет место равенство

$$\int_C [A(\lambda; u, v; r)]_n\, ds = \frac{1}{\pi r^2}\iint_{x^2+y^2<r^2} dx\, dy \int_{C_{x,y}} \lambda_n\, ds. \tag{22}$$

Если функция λ субгармоническая, то $A(\lambda; u, v; r)$ тоже субгармоническая [Radó ([10])] и, следовательно, по уже доказанному,

$$\int_C [A(\lambda; u, v; r)]_n\, ds \geqslant 0.$$

Далее,

$$\lim_{r \to 0} [A(\lambda; u, v; r)]_n = \lambda_n$$

равномерно на C и, следовательно, выполнено (21). Итак, условие необходимо.

Наоборот, если для любого C выполнено условие (21), то в силу (22) для всякой области $\mathfrak{G}'$, лежащей вместе со своей границей в $\mathfrak{G}$, и для любого C, лежащего внутри $\mathfrak{G}'$,

$$\int_C [A(\lambda; u, v; r)]_n\, ds \geqslant 0,$$

и, следовательно, функция $A(\lambda; u, v; r)$ при всех достаточно малых $r > 0$ будет субгармонической в $\mathfrak{G}'$. Так как

$$\lim_{r \to 0} A(\lambda; u, v; r) = \lambda(u, v)$$

равномерно в $\mathfrak{G}'$, то λ — субгармоническая в $\mathfrak{G}'$, а так как $\mathfrak{G}'$ произвольна, то λ будет субгармонической в $\mathfrak{G}$, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 4. *Пусть функция λ (u, v) неотрицательна в $\mathfrak{G}$ и имеет там непрерывные частные производные первого порядка. Тогда для того, чтобы функция λ была класса* PL *в $\mathfrak{G}$, необходимо и достаточно выполнение следующего условия: для всякой гладкой кривой Jordan'а C, лежащей вместе с ограниченной ею областью D в $\mathfrak{G}$ и такой, что $\lambda > 0$ в $D + C$,*

$$\int_C \frac{\lambda_n}{\lambda}\, ds \geqslant 0.$$

Доказательство. Если $\lambda \equiv 0$ в $\mathfrak{G}$, то требуемое условие выполнено. Если же $\lambda \not\equiv 0$ в $\mathfrak{G}$, то лемма следует из формулы $[\log \lambda]_n = \frac{\lambda_n}{\lambda}$, леммы 3 и того факта, что для того, чтобы неотрицательная непрерывная функция λ принадлежала в некоторой области $\mathfrak{G}$ классу PL, необходимо и достаточно, чтобы $\log \lambda$ был субгармонической функцией во всякой подобласти, в которой $\lambda > 0$.

ТЕОРЕМА 9. *Пусть уравнения* (18) *определяют некоторую поверхность S класса C'', заданную изотермически. Положим $E = G = \lambda$. Тогда для того, чтобы в каждой точке поверхности S, в которой гауссова кривизна K определена (т. е. в которой $\lambda > 0$), было $K \leqslant 0$, необходимо и достаточно, чтобы λ была функцией класса* PL.

Доказательство. Утверждение следует из леммы 2 и замечания, сделанного в конце доказательства леммы 4.

Для случая, когда поверхность S принадлежит классу C''', теорема доказана Radó и Beckenbach'ом ([6]).

ЛЕММА 5. *Пусть функция* $p(z)=p(u, v)$ *принадлежит классу* $\mathfrak{H}_1$ *в круге* $|z|<1$. *Тогда*

$$\iint\limits_{u^2+v^2<1} p^2(u, v)\,du\,dv \leqslant \frac{1}{4\pi}\left\{\int_0^{2\pi} p(e^{i\theta})\,d\theta\right\}^2.$$

Знак равенства имеет место лишь в том случае, когда $p(z)\equiv|f'(z)|$; *где* $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ — *дробно-линейная функция, регулярная в* $|z|\leqslant 1$.

Доказательство. Справедливость утверждения следует из теоремы 1 и теоремы Carleman'а; рассуждения аналогичны примененным при доказательстве теоремы 2.

ЛЕММА 6. *Пусть функции*

$$x=x(u, v), \quad y=y(u, v), \quad z=z(u, v), \quad u^2+v^2\leqslant 1 \tag{23}$$

непрерывны в круге $u^2+v^2\leqslant 1$ *и имеют непрерывные частные производные первых двух порядков при* $u^2+v^2<1$.

Пусть, далее, выполнены условия:

1° *при* $u^2+v^2<1$

$$x_u^2+y_u^2+z_u^2=x_v^2+y_v^2+z_v^2, \quad x_u x_v+y_u y_v+z_u z_v=0,$$

т. е. $E=G=\lambda$, $F=0$;

2° *в каждой точке круга* $u^2+v^2<1$, *в которой гауссова кривизна* K *поверхности* (23) *определена (т. е. в которой* $\lambda>0$), $K\leqslant 0$;

3° *функция* $\lambda^{1/2}=\lambda^{1/2}(u, v)$, *принадлежащая, согласно теореме* 9, *классу* PL, *принадлежит классу* $\mathfrak{H}_1$ *при* $u^2+v^2<1$;

4° *длина кривой, ограничивающей поверхность* (23), *т. е. длина кривой*

$$x=x(\cos\theta, \sin\theta), \quad y=y(\cos\theta, \sin\theta), \quad z=z(\cos\theta, \sin\theta), \quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

равна интегралу

$$\int_0^{2\pi}\lambda^{1/2}(e^{i\theta})\,d\theta.$$

Обозначим через C *единичную окружность* $u^2+v^2=1$, *через* D — *любой диаметр окружности* C, *через* K — *любую окружность радиуса* <1, *лежащую на круге* $u^2+v^2\leqslant 1$. *Тогда при отображении* (23) *образы* C, D *и* K *будут спрямляемыми кривыми, и если* $L(C)$, $L(D)$ *и* $L(K)$ — *длины этих образов, то*

$$L(D)\leqslant\tfrac{1}{2}L(C), \quad L(K)\leqslant L(C). \tag{24}$$

Знак равенства хотя бы в одном из неравенств (24) *может иметь место только, если поверхность* S, *заданная уравнениями* (23), *вырождается в точку.*

Замечание. То обстоятельство, что образ круга C есть спрямляемая кривая, следует из предположений 1°—3°. Вероятно, предположение 4° есть следствие прочих предположений леммы, но я не могу этого доказать.

Доказательство. В силу предположения 4°

$$L(C)=\int_0^{2\pi}\lambda^{1/2}(e^{i\theta})\,d\theta. \tag{25}$$

Очевидно, что

$$L(D)=\int_{-1}^{1}\lambda^{1/2}(\rho e^{i\theta})\,d\rho,\quad L(K)=\int_K \lambda^{1/2}(z)\,|dz|. \tag{26}$$

Теперь наша теорема следует из (25), (26) и теорем 2 и 6. Первое из неравенств (24) доказано Beckenbach'ом [4] (без исследования вопроса о знаке равенства) для случая, когда координатные функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ имеют непрерывные первые частные производные в $u^2+v^2\leqslant 1$ и непрерывные третьи частные производные при $u^2+v^2<1$.

ТЕОРЕМА 10. *Пусть выполнены предположения леммы 6. Тогда площадь a поверхности S и длина $l=L(C)$ «ограничивающей» ее кривой удовлетворяют изопериметрическому неравенству*

$$a\leqslant\frac{l^2}{4\pi}. \tag{27}$$

Знак равенства имеет место только в следующих двух случаях:

1° *поверхность S вырождается в точку;*

2° *поверхность S развертывается на плоскость, а ее граница (образ C) есть геодезический круг.*

Доказательство. Как мы знаем,

$$l=\int_0^{2\pi}\lambda^{1/2}(e^{i\theta})\,d\theta.$$

Очевидно, что

$$a=\iint\limits_{u^2+v^2<1}\lambda(u, v)\,du\,dv.$$

Теперь неравенство (27) следует из леммы 5 и теоремы 9. Оттуда же заключаем, что знак равенства имеет место только в том случае, если $\lambda(z)=|f'(z)|^2$, где $f(z)$ — дробно-линейная функция, регулярная в $|z|\leqslant 1$.

Если $f(z)\not\equiv\text{const}$, то положим $w=f(z)$ и пусть $\bar{C}$ — образ круга C в w-плоскости при отображении $w=f(z)$. Положим $w=\xi+i\eta$, и пусть

$$u=u(\xi, \eta),\quad v=v(\xi, \eta)$$

при (ξ, η) внутри $\bar{C}$. Тогда, если

$$\bar{x}=x\,[u(\xi, \eta);\ v(\xi, \eta)]$$

и аналогично для $\bar{y}(\xi, \eta)$, $\bar{z}(\xi, \eta)$, то легко видеть, что уравнения

$$x=\bar{x}(\xi, \eta),\quad y=\bar{y}(\xi, \eta),\quad z=\bar{z}(\xi, \eta)\quad [(\xi, \eta) \text{ внутри } \bar{C}]$$

представляют поверхность S, причем

$$\bar{x}_\xi^2+\bar{y}_\xi^2+\bar{z}_\xi^2=\bar{x}_\eta^2+\bar{y}_\eta^2+\bar{z}_\eta^2=1,\quad \bar{x}_\xi\bar{x}_\eta+\bar{y}_\xi\bar{y}_\eta+\bar{z}_\xi\bar{z}_\eta=0,$$

откуда и следует теорема.

ТЕОРЕМА 11. *Пусть $\mathfrak{G}$ есть область в плоскости uv и пусть уравнения* (18) *определяют поверхность S класса C'', заданную изотермически, причем гауссова кривизна K поверхности S меньше или равна нулю в каждой точке, где она определена. Пусть Γ — спрямляемая кривая Jordan'a, лежащая вместе со своей внутренностью в $\mathfrak{G}$, l — длина образа Γ* кривой Γ при отображении* (18), *a — площадь куска S* поверхности S, ограниченного кривой Γ*.*

Тогда выполнено изопериметрическое неравенство (27), *причем знак равенства имеет место лишь в следующих двух случаях:*

1° *S* есть точка;*

2° *S* развертывается на плоскость, а Γ* есть геодезический круг.*

Замечание. Для случая, когда S есть регулярная аналитическая поверхность, а Γ^* — аналитическая кривая, теорема доказана Beckenbach'ом и Radó ([6]).

Доказательство. Пусть D — внутренность кривой Γ. Отобразим D конформно на круг $|w| < 1$ посредством функции $w = f(z)$, $z = u + iv$, $w = \xi + i\eta$. Пусть функции $\bar{x}(\xi, \eta)$, $\bar{y}(\xi, \eta)$, $\bar{z}(\xi, \eta)$ определены как на стр. 174. В силу известных теорем F. Riesz'a и M. Riesz'a о конформном отображении круга на область, ограниченную спрямляемой кривой, убедимся после простых вычислений, что функции

$$x = \bar{x}(\xi, \eta), \quad y = \bar{y}(\xi, \eta), \quad z = \bar{z}(\xi, \eta), \quad \xi^2 + \eta^2 \leqslant 1,$$

удовлетворяют условиям леммы 6 и отображают круг $\xi^2 + \eta^2 \leqslant 1$ на S, а окружность $\xi^2 + \eta^2 = 1$ на Γ^*. Остается применить теорему 10.

Поступило
30. VIII. 1943

ЛИТЕРАТУРА

[1] Fejér L. und Riesz F., Über einige funktionentheoretische Ungleichungen, Math. Zeitschr., 9 (1921).

[2] Carleman T., Zur Theorie der Minimalflächen, Math. Zeitschr., 9 (1921), 154—160.

[3] Beckenbach E. F., The area and boundary of minimal surfaces. Annals of Mathematics, 33 (1932), 658—664.

[4] Beckenbach E. F., On a theorem of Fejér and Riesz, Journ. London Math. Soc., XIII (1938), 82—86.

[5] Beckenbach E. F. and Radó T., Subharmonic functions and minimal surfaces, Trans. Amer. Math. Soc., 35 (1933), 648—660.

[6] Beckenbach E. F. and Radó T., Subharmonic functions and surfaces of negative curvature, Trans. Amer. Math. Soc., 35 (1933), 662—682.

[7] Привалов И. И., Граничные значения аналитических функций, Москва, 1941.

[8] Привалов И. И., Различные классы субгармонических функций в связи с их аналитическими представлениями, Изв. АН СССР, серия матем., No. 2 (1938), 191—220.

[9] Riesz F., Eine Ungleichung für harmonische Funktionen, Monatshefte für Mathematik und Physik, 1936.

[0] Radó T., Subharmonic functions.

S. LOZINSKI. ON SUBHARMONIC FUNCTIONS AND THEIR APPLICATION TO THE THEORY OF SURFACES

SUMMARY

The articles of F. Riesz aud Fejér (1) and of Carleman (2) were the beginning of a series of papers by different authors, devoted to the study of integrals of the modulus of analytic functions along certain curves and to the generalizations of the isoperimetric inequality to some classes of surfaces. We mention especially the papers of T. Radó and Beckenbach, who revealed the connection between the theory of subharmonic functions and some properties of surfaces of negative curvature. They were thus able to generalize the isoperimetric inequality to surfaces of negative curvature provided the surface and the boundary curve of the surface possesses some degree of regularity. In the present article some generalizations of the results of the mentioned authors are given.

We say that a function $p(z)=p(u,v)$, $z=u+iv$, defined in a domain (connected open set) D of the complex z-plane is of class PL in this domain if either: 1° $p(z)\equiv 0$ in D or 2° $0\leqslant p(z)<+\infty$ in D and $\log p(z)$ is subharmonic in D. (For the definition and properties of subharmonic functions see the book of T. Radó «Subharmonic functions»). Let $p(z)$ be of class PL in $|z|<1$. We say that $p(z)$ is of class $\mathfrak{H}_\delta$ in $|z|<1$ if

$$\int_0^{2\pi} p^\delta(re^{i\theta})\,d\theta\leqslant C<+\infty \qquad (0\leqslant r<1,\ \delta>0).$$

It is known that for a function $p(z)\in\mathfrak{H}_\delta$ there exists a radial limit

$$p(e^{i\theta})=\lim_{r\to 1} p(re^{i\theta})$$

for almost every θ, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, and the following relations hold

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi} p^\delta(re^{i\theta})\,d\theta=\int_0^{2\pi} p^\delta(e^{i\theta})\,d\theta,\quad \lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi}|p(e^{i\theta})-p(re^{i\theta})|^\delta\,d\theta=0.$$

Let $f(z)$ be a regular analytic function for $|z|<1$. We say that $f(z)$ belongs to the class H_δ ($\delta>0$) if

$$\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^\delta\,d\theta\leqslant C<+\infty \quad \text{for } 0\leqslant r<1.$$

It is known that for a function $f(z)\in H_\delta$ there exists a non-tangential limit

$$f(e^{i\theta})=\lim_{z\to e^{i\theta}} f(z)$$

for almost every θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

THEOREM 1. *Let* $p(z)$ *be of class* $\mathfrak{H}_\delta$ *in* $|z| < 1$. *Then there exists a function* $f(z) \in H_\delta$ *such, that*

$$p(z) \leqslant |f(z)| \quad \textit{for} \quad |z| < 1; \quad p(z) = |f(z)| \quad \textit{almost everywhere on} \quad |z| = 1.$$

THEOREM 2. *Let* $p(z)$ *be of class* $\mathfrak{H}_\delta$ *in* $|z| < 1$. *Then*

$$\int_{-1}^{1} p^\delta (re^{i\theta})\, dr \leqslant \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p^\delta (e^{it})\, dt. \tag{1}$$

If for some θ *equality takes place in* (1), *then* $p(z) \equiv 0$ *in* $|z| < 1$. *The constant* $\frac{1}{2}$ *is the best possible.*

Remark. This is a generalization of a theorem of Beckenbach ([4]) and of a theorem of F. Riesz and Fejér ([1]). The statement of the theorem concerning the case of equality settles a question left open by Beckenbach.

THEOREM 3. *Let* $p(z)$ *be of class* PL *in* $|z| < 1$. *Suppose that there exists a set* E *of positive measure on the unit circle* $|z| = 1$ *such that for every* $z_0 \in E$ *we have* $p(z) \to 0$ *as* $z \to z_0$ *along a non-tangential path. Then* $p(z) \equiv 0$ *in* $|z| < 1$.

This is a generalization of a known theorem of Privaloff on analytic functions and of a theorem of T. Radó and Beckenbach ([5]) on subharmonic functions.

THEOREM 4. *Let* $p(z)$ *belong to* $\mathfrak{H}_1$ *in* $|z| < 1$. *Then*

$$\iint_{u^2+v^2<1} p^2(u, v)\, du\, dv \leqslant \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} p(e^{i\theta})\, d\theta \right\}^2$$

and equality takes it and only it $p(z) = |f'(z)|$ *where*

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

is a linear function regular in $|z| \leqslant 1$.

This is a generalization of a theorem of Carleman ([3]).

THEOREM 5. *Let* $p(z)$ *belong to* $\mathfrak{H}_\delta$ *in* $|z| < 1$. *Let* C *denote the unit circle* $|z| = 1$ *and* K *a circle of radius* < 1 *touching the unit circle from within. Then*

$$\int_K p^\delta(z)\, |dz| \leqslant \int_C p^\delta(z)\, |dz|,$$

where equality takes place only for $p(z) \equiv 0$.

THEOREM 6. *Let the function* $w = f(z)$ *map the circle* $|z| < 1$ *conformally onto the interior of a rectifiable curve* Γ *in the w-plane. Let* K

be a circle of radius <1 *touching the unit circle* $|z|<1$ *from the interior, and let* Γ^* *be the image of* K *in the* w*-plane by the mapping* $w=f(z)$. *Then the length* $L(\Gamma^*)$ *of the curve* Γ^* *is less than the length* $L(\Gamma)$ *of the curve* Γ:

$$L(\Gamma^*) < L(\Gamma).$$

Let Γ be an analytic Jordan curve in the complex plane. We call «total rotation» of Γ and design by $T(\Gamma)$ the total variation of the angle between the unit tangential vector of the curve Γ and a fixed direction when the point of contact describes Γ. It is obvious that $T(\Gamma) \geqslant 2\pi$ and equality takes place if and only if the curve Γ is convex.

THEOREM 7. *Let the function* $w=f(z)$ *map the unit circle* $|z|<1$ *conformally onto the interior of an analytic Jordan curve* Γ *of the* w*-plane. Let* K *and* Γ^* *be defined as in theorem 6. Then the following statements hold:*

1° *If* Γ *is convex, then* Γ^* *is convex, i. e.* $T(\Gamma^*)=T(\Gamma)=2\pi$.

2° *If* Γ *is not convex, then*

$$2\pi < T(\Gamma^*) < T(\Gamma),$$

i. e. Γ^* *is «more convex» than* Γ, *but not convex.*

Remark. The statement 1° follows most easily from known results and thus cannot be regarded as new. As to 2°, the inequality $2\pi < T(\Gamma^*)$ might in some cases seem striking, as the following example shows. Let Γ possess a convex arc γ (the length of γ may be as close to the length of Γ as we wish) and let the function $w=f(z)$ map $|z|<1$ *onto* the interior of Γ in such a way that the point of contact of K with the unit circle is carried into a point of γ. Then if K has a small radius, it would seem that we could have $T(\Gamma^*)=2\pi$, i. e. Γ^* could be convex. Our statement 2° shows, however, that this never can be.

Let $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ be three functions continuous with their partial derivatives of the first k ($k \geqslant 2$ an integer) orders in a domain D of the uv-plane, and let

$$x_u^2+y_u^2+z_u^2=x_v^2+y_v^2+z_v^2, \quad x_u x_v+y_u y_v+z_u z_v=0$$

in D. Then we say that the formulae

$$x=x(u, v), \quad y=y(u, v), \quad z=z(u, v) \tag{2}$$

define a surface S of class $C^{(k)}$ in isothermic representation and put

$$\lambda=\lambda(u, v)=x_u^2+y_u^2+z_u^2=x_v^2+y_v^2+z_v^2.$$

The Gaussian curvature K is defined at every point of the surface. S (i. e. at every point $(u, v) \in D$) where $\lambda > 0$. We say that the surface S is of negative curvature if $K \leqslant 0$ at every point where it is defined.

THEOREM 8. *Let S be a surface of class C'' given in isothermic representation. In order that S be of negative curvature it is necessary and sufficient that λ belongs to the class* PL *in D.*

Remark. For the surfaces of class C''' (given in isothermic representation) this theorem was proved by T. Radó and Beckenbach ([6]).

THEOREM 9. *Let the functions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ be continuous in $u^2+v^2 \leqslant 1$ and define for $u^2+v^2 < 1$ a surface S of class C'', given in isothermic representation and of negative curvature (then λ is of class* PL *in $u^2+v^2 < 1$). If furthermore $\lambda^{1/2} \in \mathfrak{H}_1$ and the length of the (necessarily rectifiable) boundary curve of S*

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad u^2+v^2 = 1,$$

is equal to

$$\int_0^{2\pi} \lambda^{1/2}(e^{i\theta})\, d\theta,$$

then the following statements hold:

1° *Every diameter of the unit circle $u^2+v^2=1$ is mapped by* (2) *onto a curve on S, the length of which is less than half of the length of the boundary curve of S; the only exception being the case where S reduces to a point.*

2° *Every circle K of radius < 1 touching the unit circle from within is mapped by* (2) *onto a curve lying on S, the length of which is less than the length of the boundary curve of S; the only exception being the case where S reduces to a point.*

3° *If a means the area of S and l the length of the boundary curve of S then the isoperimetric inequality*

$$a \leqslant \frac{l^2}{4\pi} \tag{3}$$

holds. Equality in (3) *takes place only in the following cases:*

(a) *The surface S reduces to a point.*

(b) *S is a piece of a developpable surface, its boundary curve is a geodesic circle and the equations* (2) *give a conformal representation of $u^2+v^2 < 1$ on S.*

Remark. This is a generalization of some theorems of T. Radó and Beckenbach.

THEOREM 10. *Let S be a surface of class C'' given in isothermic representation defined for $(u, v) \in D$. Let $K \leqslant 0$ at avery point, wheve K*

is defined. Let Γ *be a rectifiable curve lying in D. Let* l *be the length of the image* Γ^* *of* Γ *by the mapping* (2) *and* a *the area of the piece* S^* *of* S *bounded by* Γ^* (*i. e. the area of the image by* (2) *of the portion of* D *bounhded by* Γ).

Then the isoperimetric inequality (3) *holds and equality takes place only in the following two cases:*

(a) S^* *reduces to a point;*

(b) S^* *is a piece of a developpable surface,* Γ^* *is a geodesic circle and the equations* (2) *give a conformal map of the piece of* D *bounded by* Γ *onto* S^*.

In case S is a regular analytic surface (i. e. an analytic surface with $EG-F^2>0$) and Γ^* an analytic curve the theorem is proved by T. Radó and Beckenbach ([6]).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 8 (1944), 195–224 Série mathématique

Ф. ФРАНКЛЬ

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ЭЛЛИПТИКО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ НА ПЕРЕХОДНОЙ ЛИНИИ

(*Представлено академиком* С. А. Христиановичем)

Решается задача Коши для смешанного эллиптико-гиперболического уравнения с начальными данными на отрезке оси абсцисс. Решение представляется в виде суммы двух определенных интегралов и применимо к области абсолютно малых отрицательных значений

Введение

В настоящей работе дается решение задачи Коши для уравнений вида

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+a(x, y)\frac{\partial z}{\partial x}+b(x, y)\frac{\partial z}{\partial y}+c(x, y)z=0 \tag{1}$$

с начальными данными на отрезке оси x.

Функции $b(x, y)$ и $c(x, y)$ считаются регулярно аналитическими в окрестности этого отрезка. Решение ищется в области полуплоскости $y<0$ (в этой полуплоскости уравнение (1) имеет гиперболический тип), ограниченной указанным отрезком оси x и двумя характеристиками.

Полученное решение не требует дифференцирования данных Коши, в связи с чем оно обеспечивает «корректность нулевого порядка» постановки задачи Коши. Иными словами, для сколь угодно точного решения задачи Коши требуется только достаточно точное знание начальных данных, но не их производных. Решение легко распространяется на неоднородные уравнения вида

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+a(x, y)\frac{\partial z}{\partial x}+b(x, y)\frac{\partial z}{\partial y}+c(x, y)z=d(x, y). \tag{1a}$$

До сих пор подобное решение было известно только для уравнения

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0. \tag{2}$$

Напомним это решение [1]. Пусть λ, μ — характеристические координаты, связанные в случае уравнений (1), (1а) с координатами x, y формулами

$$\left.\begin{aligned}\lambda &= x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2},\\ \mu &= x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2}.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Тогда уравнение переходной линии $y = 0$ (т. е. линии перехода от эллиптического к гиперболическому типу) принимает вид

$$\mu - \lambda = 0, \tag{3a}$$

а уравнение (2) перепишется в виде

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\lambda\,\partial\mu} + \frac{1}{6(\mu-\lambda)}\left(\frac{\partial z}{\partial\lambda} - \frac{\partial z}{\partial\mu}\right) = 0. \tag{4}$$

Пусть теперь

$$\left.\begin{aligned}\tau(x) &= z(x, 0),\\ \nu(x) &= z_y(x, 0).\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Тогда решение уравнения (4) в точке (λ_0, μ_0) будет:

$$z(\lambda_0, \mu_0) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right)} \int\limits_0^1 \frac{\tau[\lambda_0 + (\mu_0 - \lambda_0)t]\,dt}{t^{5/6}(1-t)^{5/6}} -$$

$$- \left(\frac{3}{4}\right)^{2/3} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{5}{6}\right)} \int\limits_0^1 \frac{\nu[\lambda_0 + (\mu_0 - \lambda_0)t]\,dt}{t^{1/6}(1-t)^{1/6}} (\mu_0 - \lambda_0)^{2/3}. \tag{6}$$

Нами доказывается, что и для более общего уравнения (1) существует решение упомянутой задачи вида:

$$z(\lambda_0, \mu_0) = \int\limits_0^1 g(\lambda_0, \mu_0; t)\,\tau[\lambda_0 + (\mu_0 - \lambda_0)t]\,dt +$$

$$+ \int\limits_0^1 h(\lambda_0, \mu_0; t)\,\nu[\lambda_0 + (\mu_0 - \lambda_0)t]\,dt, \tag{7}$$

где

$$\left.\begin{aligned}g(\lambda_0, \mu_0; t) &= \frac{O(1)}{t^{5/6}(1-t)^{5/6}},\\ h(\lambda_0, \mu_0; t) &= \frac{O(1)}{t^{1/6}(1-t)^{1/6}}(\mu_0 - \lambda_0)^{2/3}.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Символ $O(1)$ означает ограниченную величину с границей, не зависящей от λ_0, μ_0, t.

Наличие решения вида (7) обеспечивает корректность нулевого порядка постановки задачи Коши с начальными данными на переходной линии.

В частности, к виду (1) может быть сведено любое уравнение вида

$$f(y)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, \tag{9}$$

где

$$f(y)=ay+by^2+\ldots \quad (a>0). \tag{9a}$$

Для этого требуется только подстановка

$$y'=\frac{1}{4}\left(\int\limits_0^y \frac{dy}{\sqrt{f(y)}}\right)^2 \tag{10}$$

К уравнениям вида (9) принадлежит, в свою очередь, уравнение С. А. Чаплыгина для определения адиабатических плоскопараллельных безвихренных течений газа ([2])

$$k\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2}=0, \tag{11}$$

где k — некоторая функция σ.

Для уравнения (11) до сих пор были известны два решения задачи Коши с начальными данными на переходной линии, а именно решение на основе теоремы Коши — Ковалевской, а также решение С. А. Христиановича [([3]), гл. V, § 14]. Оба решения применимы только при аналитических начальных данных и содержат в явном виде все производные всех порядков этих начальных данных, в отличие от нашего решения, не требующего производных.

В основной части работы излагается ход доказательства для частного случая $a(x, y)=0$. В конце дается распространение результатов на случай $a\neq 0$.

Краткое изложение доказательства

Если перейти к характеристическим координатам (3), то уравнение (1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\lambda\,\partial\mu}+\frac{1}{6(\mu-\lambda)}\left(\frac{\partial z}{\partial\lambda}-\frac{\partial z}{\partial\mu}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}(\mu-\lambda)^{-1/3}\,b\left(\frac{\partial z}{\partial\lambda}-\frac{\partial z}{\partial\mu}\right)-$$
$$-\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3}(\mu-\lambda)^{-2/3}cz=0. \tag{12}$$

Следовательно, функция Римана $u(\lambda_0, \mu_0; \lambda, \mu)$ уравнения (12) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\lambda\,\partial\mu}-\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}-\frac{\partial}{\partial\mu}\right)\left[\frac{u}{6(\mu-\lambda)}\right]=$$
$$=-\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}-\frac{\partial}{\partial\mu}\right)\left(\frac{bu}{(\mu-\lambda)^{1/3}}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3}\frac{cu}{(\mu-\lambda)^{2/3}}=\mathfrak{F}(u) \tag{13}$$

и краевым условиям:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial \lambda}+Lu=0 \quad \text{при} \quad \mu=\mu_0, \\ &\frac{\partial u}{\partial \mu}-Lu=0 \quad \text{при} \quad \lambda=\lambda_0, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

где

$$L=\frac{1}{6(\mu-\lambda)}-\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}\frac{b}{\sqrt[3]{\mu-\lambda}} \tag{14a}$$

и

$$u(\lambda_0, \mu_0; \lambda_0, \mu_0)=1. \tag{14b}$$

Эти условия могут быть выражены также в виде

$$\left.\begin{aligned} &u(\lambda_0, \mu_0; \lambda_0, \mu)=\sqrt[6]{\frac{\mu-\lambda_0}{\mu_0-\lambda_0}}\cdot e^{\int\limits_{\mu_0}^{\mu} f(\mu,\lambda_0)\,d\mu}, \\ &u(\lambda_0, \mu_0; \lambda, \mu_0)=\sqrt[6]{\frac{\mu_0-\lambda}{\mu_0-\lambda_0}}\cdot e^{-\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} f(\mu_0,\lambda)\,d\lambda}, \end{aligned}\right] \tag{15}$$

где

$$f(\mu, \lambda)=-\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}\frac{b}{\sqrt[3]{\mu-\lambda}}. \tag{15a}$$

Обозначим через $\bar{u}(\lambda_0, \mu_0; \lambda, \mu)$ функцию Римана уравнения (4). Тогда [([4]), гл. XXVI, дополнение 5]

$$\bar{u}(\lambda_0, \mu_0; \lambda, \mu)=\frac{(\mu-\lambda)^{1/3}}{(\mu-\lambda_0)^{1/6}(\mu_0-\lambda)^{1/6}}F\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}; 1; \sigma\right), \tag{16}$$

где F — гипергеометрическая функция и

$$\sigma=\frac{(\lambda-\lambda_0)(\mu_0-\mu)}{(\mu_0-\lambda)(\mu-\lambda_0)}, \tag{16a}$$

откуда

$$1-\sigma=\frac{(\mu_0-\lambda_0)(\mu-\lambda)}{(\mu_0-\lambda)(\mu-\lambda_0)}. \tag{16b}$$

Далее доказывается, что функция Римана $u(\lambda_0, \mu_0; \lambda, \mu)$ уравнения (1) может быть представлена в виде ряда

$$u=u_0+u_1+u_2+\ldots, \tag{17}$$

где

$$u_0(\lambda_0, \mu_0; \lambda, \mu)=\bar{u}(\lambda_0, \mu_0; \lambda, \mu), \tag{17a}$$

$$u_1(\lambda_0, \mu_0; \lambda, \mu)=\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}\int\limits_{\mu_0}^{\mu}\bar{u}(\lambda', \mu'; \lambda, \mu)\,\mathfrak{F}[u_0(\lambda_0, \mu_0; \lambda', \mu')]\,d\lambda' d\mu' -$$

$$-\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}\bar{u}(\lambda', \mu_0; \lambda, \mu) f(\mu_0, \lambda')\frac{(\mu_0-\lambda')^{1/6}}{(\mu_0-\lambda_0)^{1/6}}e^{-\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda'} f(\mu_0,\lambda')\,d\lambda'}\,d\lambda' +$$

$$+\int_{\mu_0}^{\mu} \bar{u}(\lambda_0, \mu'; \lambda, \mu) f(\mu', \lambda_0) \frac{(\mu'-\lambda_0)^{1/6}}{(\mu_0-\lambda_0)^{1/6}} e^{\int_{\mu_0}^{\mu'} f(\mu', \lambda_0)\, d\mu'} d\mu' - u_1' + u_1'' + u_1''', \quad (17b)$$

$$u_{n+1}(\lambda_0, \mu_0; \lambda, \mu) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \int_{\mu_0}^{\mu} \bar{u}(\lambda', \mu'; \lambda, \mu)\, \mathfrak{F}[u_n(\lambda_0, \mu_0; \lambda', \mu')]\, d\lambda'\, d\mu'$$

$$(n-1, 2, 3, \ldots).$$

Для доказательства формулы (17) требуется только доказать, что ряды $\sum u_n$, $\sum \frac{\partial u_n}{\partial \lambda}$, $\sum \frac{\partial u_n}{\partial \mu}$ равномерно сходятся в области

$$\lambda \geqslant \lambda_0, \quad \mu \leqslant \mu_0, \quad \mu - \lambda \geqslant \varepsilon, \quad (18)$$

где ε — произвольное положительное число.

Это доказывается при помощи оценок, получаемых на основе некоторых свойств гипергеометрической функции

$$\left.\begin{aligned} &u_1 = O(1)(\mu_0-\lambda)^{-1/6}(\mu-\lambda_0)^{-1/6}(\mu-\lambda)^{1/3}(\mu_0-\lambda_0)^{2/3},\\ &|u_n| \leqslant A[B(\mu_0-\lambda_0)]^{\frac{2n-1}{3}}(\mu-\lambda)^{1/3} \quad (n=2, 3, \ldots),\\ &\mathfrak{F}(u_1) = O(1)(\mu_0-\lambda)^{-5/6}(\mu-\lambda_0)^{-5/6}(\mu-\lambda)^{-1/3}(\mu_0-\lambda_0)^{4/3}; \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{F}(u_2) = O(1)(\mu_0-\lambda)^{-1/6}(\mu-\lambda_0)^{-1/6}(\mu-\lambda)^{-1/3}(\mu_0-\lambda_0)^{2/3},\\ &|\mathfrak{F}(u_n)| \leqslant A[B(\mu_0-\lambda_0)]^{\frac{2n}{3}-1}(\mu-\lambda)^{-1/3} \quad (n=3, 4, \ldots), \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

причем оценки (20) относятся также к выражениям

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}[f(\mu, \lambda) u_n] \text{ и } \frac{\partial}{\partial \mu}[f(\mu, \lambda) u_n].$$

Из формул (17), (19), (20) следуют важные оценки для функции Римана $u(\lambda_0, \mu_0; \lambda, \mu)$:

$$\left.\begin{aligned} &u(\lambda_0, \mu_0; \lambda, \mu) = O(1)(\mu_0-\lambda)^{-1/6}(\mu-\lambda_0)^{-1/6}(\mu-\lambda)^{1/3},\\ &\mathfrak{F}[u(\lambda_0, \mu_0; \lambda, \mu)] = O(1)(\mu_0-\lambda)^{-5/6}(\mu-\lambda_0)^{-5/6}(\mu-\lambda)^{-1/3}(\mu_0-\lambda_0)^{2/3}. \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

В формулах (19), (20), (21), как и в дальнейшем, символ $O(1)$ означает ограниченную величину, причем граница не зависит от λ_0, μ_0, λ, μ. Числа A и B также не зависят от λ, μ, λ_0, μ_0.

Чтобы решить задачу Коши с начальными данными на переходной линии, решим ее сперва с начальными данными на линии

$$\mu = \lambda + \varepsilon, \quad (22)$$

где ε — малое положительное число, после чего перейдем к пределу $\varepsilon \to 0$.

Согласно формуле Римана

$$z(\lambda_0, \mu_0) = \frac{1}{2}[(uz)_{P_1} + (uz)_{P_2}] -$$

$$-\int_{P_1}^{P_2} \left\{ \left[-Luz + \frac{1}{2}\left(u \frac{\partial z}{\partial \lambda} - z \frac{\partial u}{\partial \lambda}\right) \right] d\lambda + \right.$$

$$\left. + \left[-Luz - \frac{1}{2}\left(u \frac{\partial z}{\partial \mu} - z \frac{\partial u}{\partial \mu}\right) \right] d\mu \right\}, \quad (23)$$

где интегрирование производится вдоль линии (22), а точки P_1 и P_2 даются координатами

$$\left.\begin{aligned} P_1:&\quad (\lambda_0,\ \lambda_0+\varepsilon),\\ P_2:&\quad (\mu_0-\varepsilon,\ \mu_0).\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Так как

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \lambda} &= \sqrt[3]{\frac{4}{3}}\,\frac{1}{2(\mu-\lambda)^{1/3}}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial x},\\ \frac{\partial z}{\partial \mu} &= -\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\,\frac{1}{2(\mu-\lambda)^{1/3}}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial x},\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

то после предельного перехода $\varepsilon \to 0$ получаем формулу вида (7), причем

$$\left.\begin{aligned} g(\lambda_0, \mu_0; t) &= \lim_{\mu-\lambda\to 0}\left[2Lu+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \lambda}-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \mu}\right]\cdot(\mu_0-\lambda_0),\\ h(\lambda_0, \mu_0; t) &= \lim_{\mu-\lambda\to 0}\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\,\frac{u}{(\mu-\lambda)^{1/3}}(\mu_0-\lambda_0).\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Для установления законности этого предельного перехода докажем прежде всего существование пределов в правых частях уравнений (26). Для этого рассмотрим выражения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{u_n}{6(\mu-\lambda)}+\frac{1}{2}\frac{\partial u_n}{\partial \lambda},\\ &\frac{u_n}{6(\mu-\lambda)}-\frac{1}{2}\frac{\partial u_n}{\partial \mu}.\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Применяя те же средства, как и при доказательстве неравенств (19), (20), докажем следующие оценки:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{\partial u_1}{\partial \lambda}+\frac{u_1}{6(\mu-\lambda)} = O(1)(\mu_0-\lambda_0)^{4/3}(\mu-\lambda_0)^{-5/6}(\mu_0-\lambda)^{-5/6},\\ &\frac{1}{2}\frac{\partial u_2}{\partial \lambda}+\frac{u_2}{6(\mu-\lambda)} = O(1)(\mu_0-\lambda_0)^{2/3}(\mu-\lambda_0)^{-1/6}(\mu_0-\lambda)^{-1/6},\\ &\left|\frac{1}{2}\frac{\partial u_n}{\partial \lambda}+\frac{u_n}{6(\mu-\lambda)}\right| \leqslant A\left[B(\mu_0-\lambda_0)\right]^{\frac{2n}{3}-1}\quad (n=3, 4, \ldots)\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

и аналогичные оценки для $\frac{1}{2}\frac{\partial u_n}{\partial \mu}-\frac{u_n}{6(\mu-\lambda)}$. Из них вытекают оценки

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \lambda}+\frac{u}{6(\mu-\lambda)} = O(1)(\mu_0-\lambda_0)^{2/3}(\mu-\lambda_0)^{-5/6}(\mu_0-\lambda)^{-5/6},\\ &\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \mu}-\frac{u}{6(\mu-\lambda)} = O(1)(\mu_0-\lambda_0)^{2/3}(\mu-\lambda_0)^{-5/6}(\mu-\lambda_0)^{-5/6}.\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Далее, легко доказать существование пределов

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\mu-\lambda\to 0}\frac{u_n}{\sqrt[3]{\mu-\lambda}},\\ &\lim_{\mu-\lambda\to 0}\left(\frac{u_n}{6(\mu-\lambda)}+\frac{1}{2}\frac{\partial u_n}{\partial \lambda}\right);\quad \lim_{\mu-\lambda\to 0}\left(\frac{u_n}{6(\mu-\lambda)}-\frac{1}{2}\frac{\partial u_n}{\partial \mu}\right).\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Прежде всего,

$$\lim_{\mu-\lambda\to 0}\frac{\bar{u}}{\sqrt[3]{\mu-\lambda}}=\frac{F\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{6};\ 1;\ 1\right)}{(\lambda-\lambda_0)^{1/6}(\mu_0-\lambda)^{1/6}}=\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{5}{6}\right)}(\lambda-\lambda_0)^{-1/6}(\mu_0-\lambda)^{-1/6}. \tag{31}$$

С другой стороны,

$$\lim_{\mu-\lambda\to 0}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\lambda}+\frac{\bar{u}}{6(\mu-\lambda)}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2\Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right)}\frac{(\mu_0-\lambda_0)^{2/3}}{(\lambda-\lambda_0)^{5/6}(\mu_0-\lambda)^{5/6}}; \tag{32}$$

аналогичная формула получается для $-\frac{1}{2}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\mu}+\frac{\bar{u}}{6(\mu-\lambda)}$.

На этом основании, воспользовавшись формулами (17b) и (17c), нетрудно доказать существование пределов (30), для которых получим следующие выражения:

$$\lim_{\mu-\lambda\to 0}\frac{u_1}{(\mu-\lambda)^{1/3}}=\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{5}{6}\right)}\left\{\int_{\lambda_0}^{\lambda}\int_{\mu_0}^{\lambda}(\lambda-\lambda')^{-1/6}(\mu'-\lambda)^{-1/6}\mathfrak{F}[u_0(\lambda_0,\mu_0;\lambda',\mu')]\,d\lambda'\,d\mu'-\right.$$

$$-\int_{\lambda_0}^{\lambda}(\lambda-\lambda')^{-1/6}(\mu_0-\lambda)^{-1/6}f(\mu_0,\lambda')\frac{(\mu_0-\lambda')^{1/6}}{(\mu_0-\lambda_0)^{1/6}}e^{-\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}f(\mu,\lambda')d\lambda'}\,d\lambda_1+$$

$$\left.+\int_{\mu_0}^{\lambda}(\lambda-\lambda_0)^{-1/6}(\mu'-\lambda_0)^{-1/6}f(\mu',\lambda_0)\frac{(\mu'-\lambda_0)^{1/6}}{(\mu_0-\lambda_0)^{1/6}}e^{\int_{\mu_0}^{\mu_1}f(\mu',\lambda_0)d\mu'}\,d\mu'\right\},$$

$$\lim_{\mu-\lambda\to 0}\frac{u_{n+1}}{(\mu-\lambda)^{1/3}}=\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{5}{6}\right)}\left\{\int_{\lambda_0}^{\lambda}\int_{\mu_0}^{\lambda}(\lambda-\lambda')^{-1/6}(\mu'-\lambda)^{-1/6}\mathfrak{F}[u_n(\lambda_0,\mu_0;\lambda',\mu')]\,d\lambda'\,d\mu'\right.$$

$$(n=1,\ 2,\ \ldots),$$

$$\lim_{\mu-\lambda\to 0}\left(\frac{u_1}{6(\mu-\lambda)}+\frac{1}{2}\frac{\partial u_1}{\partial\lambda}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2\Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right)}\left\{\int_{\lambda_0}^{\lambda}\int_{\mu_0}^{\lambda}\frac{(\mu'-\lambda')^{2/3}}{(\lambda-\lambda')^{5/6}(\mu'-\lambda)^{5/6}}\cdot\right.$$

$$\cdot\mathfrak{F}[u_0(\lambda_0,\mu_0;\lambda',\mu')]\,d\lambda'\,d\mu'-$$

$$-\int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{(\mu_0-\lambda')^{2/3}}{(\lambda-\lambda')^{5/6}(\mu_0-\lambda)^{5/6}}f(\mu_0,\lambda')\frac{(\mu_0-\lambda')^{1/6}}{(\mu_0-\lambda_0)^{1/6}}e^{-\int_{\lambda_0}^{\lambda}f(\mu_0,\lambda')d\lambda'}\,d\lambda'+$$

$$\left.+\int_{\mu_0}^{\mu}\frac{(\mu'-\lambda_0)^{2/3}}{(\lambda-\lambda_0)^{5/6}(\mu_0-\lambda)^{5/6}}f(\mu',\lambda_0)\frac{(\mu'-\lambda_0)^{1/6}}{(\mu_0-\lambda_0)^{1/6}}e^{\int_{\mu_0}^{\mu}f(\mu',\lambda_0)d\mu'}\,d\mu'\right\},$$

$$\lim_{\mu-\lambda\to 0}\left(\frac{u_{n+1}}{6(\mu-\lambda)}+\frac{1}{2}\frac{\partial u_{n+1}}{\partial\lambda}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2\Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right)}\int_{\lambda_0}^{\lambda}\int_{\mu_0}^{\lambda}\frac{(\mu'-\lambda')^{2/3}}{(\lambda-\lambda')^{5/6}(\mu'-\lambda)^{5/6}}\cdot$$

$$\cdot\mathfrak{F}[u_0(\lambda_0,\mu_0;\lambda',\mu')]\,d\lambda'\,d\mu'. \tag{33}$$

Воспользовавшись оценками (28), выводим отсюда существование пределов (26). При помощи оценок (21) и (29) получаем формулу (7) и оценки (8).

Отсюда вытекает единственность решения поставленной задачи. С другой стороны, если $\tau(\lambda)$ и $\nu(\lambda)$ — наперед заданные функции, где $\nu(\lambda)$ непрерывно и $\tau(\lambda)$ удовлетворяет условию Hölder'a с показателем больше $^2/_3$, то формула (7) представляет собою предельное решение [в смысле Соболева ([5])] уравнения (1) с данными Коши $\tau(\nu)$, $\nu(\lambda)$, которое при соответствующих добавочных условиях (именно, если кроме функций ν и τ непрерывны также и их первые и вторые производные) будет решением уравнения (1) в собственном смысле слова.

Перейдем теперь к доказательству приведенных выше формул.

Доказательство оценок (19), (20), (28)

Все доказательство основано на двух свойствах гипергеометрической функции. Первое выражается формулой

$$F(a;\, b;\, c;\, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}\,dt\,, \tag{34}$$

которая имеет место, если действительные части $\Re(c)$ и $\Re(b)$ удовлетворяют неравенствам

$$\Re(c) > \Re(b) > 0. \tag{34a}$$

Второе основывается на уравнении

$$\begin{aligned}&\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)\,\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,F(a;\, b;\, c;\, z) = \\ &= \Gamma(c)\,\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c-a-b)\,F(a,\, b;\, a+b-c+1;\, 1-z) + \\ &+ \Gamma(c)\,\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)\,\Gamma(a+b-c)\,(1-z)^{c-a-b}\,\cdot \\ &\cdot F(c-a,\, c-b;\, c-a-b+1;\, 1-z),\end{aligned} \tag{35}$$

справедливом при нецелых значениях $c-a-b$.

В предельном случае, когда $c-a-b=0$, (35) принимает вид

$$\begin{aligned}&\Gamma^2(a)\,\Gamma^2(b)\,F(a,\, b;\, a+b;\, z) = 2\gamma_0\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(a+b)\,F(a,\, b;\, 1;\, 1-z) + \\ &+ \gamma_{-1}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big\{\Gamma(a+b+\varepsilon)\,\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,F(a,\, b;\, 1-\varepsilon;\, 1-z) - \\ &- \Gamma(a+b+\varepsilon)\,\Gamma(a+\varepsilon)\,\Gamma(b+\varepsilon)\,F(a+\varepsilon,\, b+\varepsilon;\, 1+\varepsilon;\, 1-z)\Big\}_{\varepsilon=0} - \\ &- \gamma_{-1}\Gamma(a+b)\,\Gamma(a)\,\Gamma(b)\ln(1-z)\,F(a,\, b;\, 1;\, 1-z),\end{aligned} \tag{35a}$$

где γ_{-1}, γ_0 — первые два коэффициента в разложении гамма-функции в ряд Лорана в окрестности точки нуль:

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{\gamma_{-1}}{\varepsilon} + \gamma_0 + \ldots, \tag{35b}$$

В случае $a,\, b,\, c > 0$, $a+b > c$, $0 < z < 1$ из уравнения (35) следует

$$\Gamma(a,\, b;\, c;\, z) = O(1)\,(1-z)^{c-a-b}, \tag{36}$$

а в предельном случае при $c = a+b$ из (35а) вытекает

$$\Gamma(a,\, b;\, a+b;\, z) = O(1)\,[1 + |\ln(1-z)|]. \tag{36a}$$

Все дальнейшие оценки основываются на формулах (34), (36) (36а). Оценим прежде всего выражение $\mathfrak{F}[u_0(\lambda_0, \mu_0;\ \lambda, \mu)]$. Имеем

$$b = \beta_0(\lambda+\mu) + \beta_1(\lambda+\mu)\cdot(\mu-\lambda)^{2/3} + \beta_2(\lambda+\mu)(\mu-\lambda)^{4/3} + \ldots, \tag{37}$$

где $\beta_0, \beta_1, \ldots$ регулярно аналитические функции от $\lambda+\mu$ в окрестности начальной линии. Следовательно,

$$\left(\frac{\partial}{\partial\lambda} - \frac{\partial}{\partial\mu}\right) b = O(1)(\mu-\lambda)^{-1/3}. \tag{38}$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{u_0}{\sqrt[3]{\mu-\lambda}}\right) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[(\mu_0-\lambda)^{-1/6}(\mu-\lambda_0)^{-1/6}\right] F\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6};\ 1; \sigma\right) +$$
$$+ (\mu_0-\lambda)^{-1/6}(\mu-\lambda_0)^{-1/6}\frac{\partial\sigma}{\partial\lambda}\cdot\frac{1}{36}F\left(\frac{7}{6}, \frac{7}{6}; 2; \sigma\right) -$$
$$- \frac{1}{6}(\mu_0-\lambda)^{-7/6}(\mu-\lambda_0)^{-1/6}F\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6};\ 1; \sigma\right) +$$
$$+ \frac{1}{36}(\mu_0-\lambda)^{-1/6}(\mu-\lambda_0)^{-1/6}\frac{(\mu_0-\lambda_0)(\mu_0-\lambda)}{(\mu_0-\lambda)^2(\mu-\lambda_0)}\cdot\left\{\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{5}{6}\right)}F\left(\frac{7}{6}, \frac{7}{6}; \frac{5}{3}; 1-\sigma\right) +\right.$$
$$\left.+ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{7}{6}\right)}(1-\sigma)^{-1/3}F\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6};\ \frac{2}{3};\ 1-\sigma\right)\right\} =$$
$$= O(1)\left\{(\mu_0-\lambda)^{-7/6}(\mu-\lambda_0)^{-1/6} + \right.$$
$$\left.+ (\mu_0-\lambda)^{-1/6}(\mu-\lambda_0)^{-1/6}\frac{(\mu_0-\lambda_0)(\mu_0-\mu)}{(\mu_0-\lambda)^2(\mu-\lambda_0)}\left[\frac{(\mu_0-\lambda)(\mu-\lambda_0)}{(\mu_0-\lambda_0)(\mu-\lambda)}\right]^{1/3}\right\} =$$
$$= O(1)\{(\mu_0-\lambda)^{-7/6}(\mu-\lambda_0)^{-1/6} +$$
$$+ (\mu_0-\lambda)^{-11/6}(\mu-\lambda_0)^{-5/6}(\mu_0-\mu)(\mu_0-\lambda_0)^{2/3}(\mu-\lambda)^{-1/3}\}. \tag{39}$$

Аналогично

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\frac{u_0}{\sqrt[3]{\mu-\lambda}} = O(1)\{(\mu_0-\lambda)^{-1/6}(\mu-\lambda_0)^{-7/6} +$$
$$+ (\mu_0-\lambda)^{-5/6}(\mu-\lambda_0)^{-11/6}(\lambda-\lambda_0)(\mu_0-\lambda_0)^{2/3}(\mu-\lambda)^{-1/3}\}. \tag{40}$$

Из формул (16), (38), (39), (40) находим

$$\mathfrak{F}[u_0(\lambda_0, \mu_0;\ \lambda, \mu)] =$$
$$= O(1)\{(\mu-\lambda)^{-1/3}(\mu_0-\lambda)^{-1/6}(\mu-\lambda_0)^{-1/6} + (\mu_0-\lambda)^{-7/6}(\mu-\lambda_0)^{-1/6} +$$
$$+ (\mu_0-\lambda)^{-1/6}(\mu-\lambda_0)^{-7/6} + (\mu-\lambda)^{-1/3}(\mu_0-\lambda_0)^{2/3}(\mu_0-\mu)(\mu_0-\lambda)^{-11/6}\cdot$$
$$\cdot(\mu-\lambda_0)^{-5/6} + (\mu-\lambda)^{-1/3}(\mu_0-\lambda_0)^{2/3}(\lambda-\lambda_0)(\mu_0-\lambda)^{-5/6}(\mu-\lambda_0)^{-11/6}\}$$
$$[\leqslant O(1)(\mu-\lambda)^{-1/3}(\mu_0-\lambda)^{-5/6}(\mu-\lambda_0)^{-5/6}(\mu_0-\lambda_0)^{2/3}]. \tag{41}$$

Следовательно, для оценки u_1' получим

$$\frac{u_1'}{(\mu-\lambda)^{1/3}} = O(1)\int_{\lambda_0}^{\lambda}\int_{\mu}^{\mu_0}(\mu'-\lambda)^{-1/6}(\mu-\lambda')^{-1/6}\{(\mu'-\lambda')^{-1/3}(\mu_0-\lambda')^{-1/6}\cdot$$
$$\cdot(\mu'-\lambda_0)^{-1/6} + (\mu_0-\lambda')^{-7/6}(\mu'-\lambda_0)^{-1/6} + (\mu_0-\lambda')^{-1/6}(\mu'-\lambda_0)^{-7/6} +$$
$$+ (\mu_0-\lambda_0)^{2/3}(\mu'-\lambda')^{-1/3}(\mu_0-\lambda')^{-11/6}(\mu'-\lambda_0)^{-5/6}(\mu_0-\mu) +$$
$$+ (\mu_0-\lambda_0)^{2/3}(\mu'-\lambda')^{-1/3}(\mu_0-\lambda')^{-5/6}(\mu'-\lambda_0)^{-11/6}(\lambda-\lambda_0)\}\,d\lambda'\,d\mu'. \tag{42}$$

После раскрытия скобок:

$$\frac{u_1'}{(\mu-\lambda)^{1/3}}=O(1)\{I_1+I_2+I_3+I_4+I_5\}. \tag{42a}$$

При этом

$$I_1=\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}\int\limits_{\mu}^{\mu_0}(\mu'-\lambda')^{-1/3}(\mu'-\lambda)^{-1/6}(\mu-\lambda')^{-1/6}(\mu_0-\lambda')^{-1/6}(\mu'-\lambda_0)^{-1/6}\,d\lambda'\,d\mu' \tag{43}$$

Оценим интеграл I_1:

$$\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}(\mu'-\lambda')^{-1/3}(\mu-\lambda')^{-1/6}(\mu_0-\lambda')^{-1/6}\,d\lambda'\leqslant\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}(\lambda-\lambda')^{-1/2}(\mu_0-\lambda')^{-1/6}\,d\lambda'. \tag{44a}$$

Вводим новую переменную v посредством уравнения

$$\lambda'=\lambda_0+(\lambda-\lambda_0)v;\ \lambda-\lambda'=(\lambda-\lambda_0)(1-v);\ (\mu_0-\lambda')=(\mu_0-\lambda_0)\left(1-\frac{\lambda-\lambda_0}{\mu_0-\lambda_0}v\right).$$

Тогда

$$\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}(\mu'-\lambda')^{-1/3}(\mu-\lambda')^{-1/6}(\mu_0-\lambda')^{-1/6}\,d\lambda'\leqslant$$

$$\leqslant(\lambda-\lambda_0)^{1/2}(\mu_0-\lambda_0)^{-1/6}\int\limits_0^1(1-v)^{-1/2}\left(1-\frac{\lambda-\lambda_0}{\mu_0-\lambda_0}v\right)^{-1/6}dv=$$

$$=\frac{\Gamma(1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)(\lambda-\lambda_0)^{1/2}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)(\mu_0-\lambda_0)^{1/6}}F\left(\frac{1}{6};\ 1;\ \frac{3}{2};\ \frac{\lambda-\lambda_0}{\mu_0-\lambda_0}\right)=O(1)\frac{(\lambda-\lambda_0)^{1/2}}{(\mu_0-\lambda_0)^{1/6}}, \tag{44b}$$

так как при вычислении параметров a, b, c — согласно формуле (34) должно быть

$$b-1=0,\quad c-b-1=-\frac{1}{2},\quad a=\frac{1}{6},\quad c>a+b. \tag{44c}$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{\mu}^{\mu_0}(\mu'-\lambda)^{-1/6}(\mu'-\lambda_0)^{-1/6}\,d\mu'\leqslant\int\limits_{\mu}^{\mu_0}(\mu'-\mu)^{-1/6}(\mu'-\lambda_0)^{-1/6}\,d\mu'. \tag{45}$$

Введем переменную интегрирования w:

$$\mu'=\mu_0-(\mu_0-\mu)w;\ \mu'=\mu=(\mu_0-\mu)(1-w);\ \mu'-\lambda_0=(\mu_0-\lambda_0)\left(1-\frac{\mu_0-\mu}{\mu_0-\lambda_0}w\right) \tag{45a}$$

Тогда

$$\int\limits_{\mu}^{\mu_0}(\mu'-\lambda)^{-1/6}(\mu'-\lambda_0)^{-1/6}\,d\mu'\leqslant\frac{\Gamma(1)\,\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)}(\mu_0-\mu)^{5/6}(\mu_0-\lambda_0)^{-1/6}\,\cdot$$

$$\cdot F\left(\frac{1}{6},1;\ \frac{11}{6};\ \frac{\mu_0-\mu}{\mu_0-\lambda_0}\right)=O(1)\frac{(\mu_0-\mu)^{5/6}}{(\mu_0-\mu_0)^{1/6}} \tag{45b}$$

Из уравнений (44b) и (45b) вытекает

$$I_1=O(1)\frac{(\lambda-\lambda_0)^{1/2}}{(\mu_0-\lambda_0)^{1/6}}\frac{(\mu_0-\mu)^{5/6}}{(\mu_0-\lambda_0)^{1/6}}\leqslant O(1)(\mu_0-\lambda_0). \tag{46}$$

Оценим интеграл I_2:

$$I_2 = \int_{\lambda_0}^{\lambda}\int_{\mu}^{\mu_0} (\mu-\lambda')^{-1/6}(\mu'-\lambda)^{-1/6}(\mu_0-\lambda')^{-7/6}(\mu'-\lambda_0)^{-1/6}\,d\lambda'\,d\mu', \tag{47}$$

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda}(\mu-\lambda')^{-1/6}(\mu_0-\lambda')^{-7/6}\,d\lambda' \leqslant \int_{\lambda_0}^{\lambda}(\lambda-\lambda')^{-1/6}(\mu_0-\lambda')^{-7/6}\,d\lambda' =$$

$$= \frac{\Gamma(1)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)}\,\frac{(\lambda-\lambda_0)^{5/6}}{(\mu_0-\lambda_0)^{7/6}}F\left(\frac{7}{6},1;\frac{11}{6};\frac{\lambda-\lambda_0}{\mu_0-\lambda_0}\right)=O(1)\frac{(\lambda-\lambda_0)^{5/6}}{(\mu_0-\lambda_0)^{7/6}}\left(\frac{\mu_0-\lambda_0}{\mu_0-\lambda}\right)^{1/3}, \tag{48}$$

$$a=\frac{7}{6},\quad b-1=0;\quad c-b-1=-\frac{1}{6};\quad c-a-b=-\frac{1}{3}.$$

Отсюда и из уравнения (45b) получим:

$$I_2 = O(1)\frac{(\mu_0-\mu)^{5/6}}{(\mu_0-\lambda_0)^{1/6}}\cdot\frac{(\lambda-\lambda_0)^{5/6}}{(\mu_0-\lambda_0)^{5/6}\,(\mu_0-\lambda)^{1/3}}\leqslant O(1)\,\frac{(\mu_0-\lambda)^{1/2}\,(\lambda-\lambda_0)^{5/6}}{(\mu_0-\lambda_0)}\leqslant$$

$$\leqslant O(1)\,(\mu_0-\lambda_0)^{1/3}. \tag{49}$$

Аналогично

$$I_3 = O(1)\,(\mu_0-\lambda_0)^{1/3}. \tag{50}$$

Оценим интеграл I_4:

$$I_4 = \int_{\lambda_0}^{\lambda}\int_{\mu_0}^{\mu}(\mu-\lambda')^{-1/6}(\mu'-\lambda)^{-1/6}(\mu'-\lambda')^{-1/3}(\mu'-\lambda_0)^{-5/6}(\mu_0-\lambda')^{-11/6}\cdot$$

$$\cdot(\mu_0-\mu')\,d\lambda'\,d\mu'\,(\mu_0-\lambda_0)^{2/3}, \tag{51}$$

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda}(\mu-\lambda')^{-1/6}(\mu_0-\lambda')^{-11/6}(\mu'-\lambda')^{-1/3}\,d\lambda' \leqslant \int_{\lambda_0}^{\lambda}(\lambda-\lambda')^{-1/2}(\mu_0-\lambda')^{-11/6}\,d\lambda' =$$

$$= \frac{\Gamma(1)\Gamma(1/2)\,(\lambda-\lambda_0)^{1/2}}{\Gamma(1/2)\,(\mu_0-\lambda_0)^{11/6}}F\left(\frac{11}{6},1;\frac{2}{3},\frac{\lambda-\lambda_0}{\mu_0-\lambda_0}\right)=O(1)\frac{(\lambda-\lambda_0)^{1/2}}{(\mu_0-\lambda_0)^{11/6}}\left(\frac{\mu_0-\lambda_0}{\mu_0-\lambda}\right)^{4/3}, \tag{52}$$

$$a=\frac{11}{6},\quad b=1,\quad c=\frac{3}{2},\quad c-b-a=-\frac{4}{3}.$$

$$\int_{\mu}^{\mu_0}(\mu'-\lambda)^{-1/6}(\mu'-\lambda_0)^{-5/6}(\mu_0-\mu')\,d\mu' \leqslant \int_{\mu}^{\mu_0}(\mu'-\mu)^{-1/6}(\mu_0-\mu')\cdot$$

$$\cdot(\mu'-\lambda_0)^{-5/6}\,d\mu' = \frac{\Gamma(2)\Gamma(5/6)}{\Gamma\left(\frac{17}{6}\right)}\,\frac{(\mu_0-\mu)^{11/6}}{(\mu_0-\lambda_0)^{5/6}}\,F\left(\frac{5}{6},2;\frac{17}{6};\frac{\mu_0-\mu}{\mu_0-\lambda_0}\right)=$$

$$=O(1)\,\frac{(\mu_0-\mu)^{11/6}}{(\mu_0-\lambda_0)^{5/6}}\left[1+\ln\frac{\mu_0-\lambda_0}{\mu-\lambda_0}\right]\leqslant O(1)\,\frac{(\mu_0-\mu)^{11/6}}{(\mu_0-\lambda_0)^{5/6}}\left(\frac{\mu_0-\lambda_0}{\mu-\lambda_0}\right)^{\varepsilon}, \tag{53}$$

$$a=\frac{5}{6},\quad b=2,\quad c=\frac{17}{6},\quad c-b-a=0,$$

где ε — произвольное число, удовлетворяющее неравенству

$$0 < \varepsilon < 1. \tag{53a}$$

Из (52) и (53) следует

$$I_4 = O(1) \frac{(\lambda-\lambda_0)^{1/2}}{(\mu_0-\lambda_0)^{1/2}(\mu_0-\lambda)^{4/3}} \frac{(\mu_0-\mu)^{11/6}}{(\mu_0-\lambda)^{5/6}} \left(\frac{\mu_0-\lambda_0}{\mu-\lambda_0}\right)^{\varepsilon} (\mu_0-\lambda_0)^{2/3} \leqslant$$

$$\leqslant O(1) \left(\frac{\mu-\lambda_0}{\mu_0-\lambda_0}\right)^{1/2-\varepsilon} \frac{(\mu_0-\lambda)^{1/2}}{(\mu_0-\lambda_0)^{1/6}} \leqslant O(1)(\mu_0-\lambda_0)^{1/3}, \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}. \tag{54}$$

Аналогично,

$$I_5 = O(1)(\mu_0-\lambda_0)^{1/3}. \tag{55}$$

Из формул (42а), (46), (49), (50), (54), (55) находим

$$\frac{u_1'}{(\mu-\lambda)^{1/3}} = O(1)(\mu_0-\lambda_0)^{1/3}. \tag{56}$$

Перейдем теперь к оценке $\frac{u_1''}{(\mu-\lambda)^{1/3}}$. Согласно формуле (18b)

$$\frac{u_1''}{(\mu-\lambda)^{1/3}} = O(1) \int_{\lambda_0}^{\lambda} (\mu_0-\lambda)^{-1/6} (\mu-\lambda')^{-1/6} (\mu_0-\lambda')^{-1/6} (\mu_0-\lambda_0)^{-1/6} \, d\lambda' \leqslant$$

$$\leqslant O(1)(\mu_0-\lambda)^{-1/6}(\mu_0-\lambda_0)^{-1/6} \int_{\lambda_0}^{\lambda} (\lambda-\lambda')^{-1/6} (\mu_0-\lambda')^{-1/6} \, d\lambda' \leqslant$$

$$\leqslant O(1)(\mu_0-\lambda)^{-1/6}(\mu_0-\lambda_0)^{-1/6} \frac{(\lambda-\lambda_0)^{5/6}}{(\mu_0-\lambda_0)^{1/6}} \leqslant O(1) \frac{(\mu_0-\lambda_0)^{1/2}}{(\mu_0-\lambda)^{1/6}} \quad [\text{см. } (45b)] \tag{57}$$

Аналогично,

$$\frac{u_1'''}{(\mu-\lambda)^{1/3}} = O(1) \frac{(\mu_0-\lambda_0)^{1/2}}{(\mu-\lambda_0)^{1/6}}. \tag{58}$$

Из формул (56), (57), (58) вытекает оценка (19) для случая $n=1$.

Чтобы получить оценку $\mathfrak{F}[u_1'(\lambda_0, \mu_0; \lambda, \mu)]$, оценим сперва $\frac{\partial}{\partial\lambda}[f(\lambda,\mu)\, u_1'(\lambda_0, \mu_0; \lambda, \mu)]$. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}[f(\lambda,\mu)\, u_1'(\lambda_0,\mu_0;\lambda,\mu)] =$$

$$= \int_{\lambda_0}^{\lambda}\int_{\mu_0}^{\mu} \frac{\partial}{\partial\lambda}[f(\lambda,\mu)\,\bar{u}(\lambda',\mu';\lambda,\mu)]\,\mathfrak{F}[u_0(\lambda_0,\mu_0;\lambda',\mu')]\, d\lambda'\, d\mu' +$$

$$+ \int_{\mu_0}^{\mu} f(\lambda,\mu)\,\bar{u}(\lambda,\mu';\lambda,\mu)\,\mathfrak{F}[u_0(\lambda_0,\mu_0;\lambda,\mu')]\, d\mu'. \tag{59}$$

Для оценки простого интеграла мы пользуемся оценкой (41) и оценкой

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}[f(\lambda,\mu)\,\bar{u}(\lambda',\mu';\lambda,\mu)] = O(1)[(\mu-\lambda)^{-1/3}(\mu'-\lambda)^{-1/6}(\mu-\lambda')^{-1/6} +$$

$$+ (\mu'-\lambda)^{-7/6}(\mu-\lambda')^{-1/6} + (\mu-\lambda)^{-1/3}(\mu'-\lambda')^{2/3}(\mu'-\mu)(\mu'-\lambda)^{-11/6}(\mu-\lambda')^{-5/6}]. \tag{60}$$

Для оценки поверхностного интеграла используем, кроме формулы (41), еще неравенство

$$f(\lambda,\mu)\,\bar{u}(\lambda,\mu';\lambda,\mu) = O(1)(\mu-\lambda)^{-1/6}(\mu'-\lambda)^{-1/6}. \tag{61}$$

Впрочем, оценки для выражения (59) находятся такими же приемами, какие применены были выше, — при помощи гипергеометрических функ-

ций. При этом требуется только использовать в соответствующих случаях неравенства

$$\left.\begin{aligned} (\mu'-\lambda')^{2/3} &= O(1)\,[(\mu'-\lambda)^{2/3}+(\mu-\lambda)^{2/3}+(\lambda-\lambda')^{2/3}],\\ (\mu'-\lambda')^{1/3} &= O(1)\,[(\mu'-\mu)^{1/3}+(\mu-\lambda)^{1/3}+(\lambda-\lambda')^{1/3}],\\ (\mu-\lambda')^{-7/6} &\leqslant (\mu-\lambda)^{-1/3}\,(\mu-\lambda')^{-5/6}. \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

В результате

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}[f(\lambda,\mu)\,u_1'(\lambda_0,\mu_0;\lambda,\mu)] = O(1)\,(\mu-\lambda)^{-1/3}\,(\mu_0-\lambda)^{-1/6}\,(\mu-\lambda_0)^{-1/6} \tag{63}$$

и аналогично

$$\frac{\partial}{\partial\mu}[f(\lambda,\mu)\,u_1'(\lambda_0,\mu_0;\lambda,\mu)] = O(1)\,(\mu-\lambda)^{-1/3}\,(\mu_0-\lambda)^{-1/6}\,(\mu-\lambda_0)^{-1/6}. \tag{64}$$

Из формул (63), (64) и формулы (19) для случая $n=1$ вытекает

$$\mathfrak{F}[u_1'(\lambda_0,\mu_0;\lambda,\mu)] = O(1)\,(\mu-\lambda)^{-1/3}\,(\mu_0-\lambda)^{-1/6}\,(\mu-\lambda_0)^{-1/6}. \tag{65}$$

Выражения $\mathfrak{F}[u_1'']$ и $\mathfrak{F}[u_1''']$ оцениваются при помощи тех же приемов. В результате получаем

$$\mathfrak{F}[u_1''+u_1'''] = O(1)\,(\mu-\lambda)^{-1/3}\,(\mu_0-\lambda)^{-5/6}\,(\mu-\lambda_0)^{-5/6}\,(\mu_0-\lambda_0)^{4/3}, \tag{66}$$

что вместе с (65) дает нам оценку (20) для случая $n=1$. Получив эту оценку, мы оценим $\frac{u_2}{(\mu-\lambda)}$ и $\mathfrak{F}[u_2]$, применяя все те же приемы. Затем выводим оценки для $\frac{u_3}{(\mu-\lambda)^{1/3}}$ и $\mathfrak{F}[u_3]$. Начиная с $n=4$, все дальнейшие неравенства (19) и (20) получаются уже легко путем математической индукции.

Для получения оценок для выражений

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u_n}{\partial\lambda}+\frac{u_n}{6(\mu-\lambda)}, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial u_n}{\partial\mu}-\frac{u_n}{6(\mu-\lambda)}$$

необходимо принять во внимание формулу

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\bar u}{\partial\lambda}+\frac{\bar u}{6(\mu-\lambda)} = \frac{(\mu-\lambda)^{1/3}}{(\mu-\lambda')^{1/6}(\mu'-\lambda)^{1/6}}\left\{\frac{(\mu'-\lambda')(\mu'-\mu)}{(\mu'-\lambda)^2(\mu-\lambda')}\cdot\frac{1}{36}F\left(\frac{7}{6},\frac{7}{6};2,\sigma\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{6(\mu'-\lambda)}F\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6};1;\sigma\right)\right\}, \tag{67}$$

из которой вытекает оценка

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\bar u}{\partial\lambda}+\frac{\bar u}{6(\mu-\lambda)} = O(1)\left[\frac{(\mu-\lambda)^{1/3}}{(\mu-\lambda')^{1/6}(\mu'-\lambda)^{7/6}}+\frac{(\mu'-\lambda')^{2/3}(\mu'-\mu)}{(\mu'-\lambda)^{11/6}(\mu-\lambda')^{5/6}}\right] \tag{68}$$

и аналогично

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\bar u}{\partial\mu}-\frac{\bar u}{6(\mu-\lambda)} = O(1)\left[\frac{(\mu-\lambda)^{1/3}}{(\mu-\lambda')^{7/6}(\mu'-\lambda)^{1/6}}+\frac{(\mu'-\lambda')^{2/3}(\lambda-\lambda')}{(\mu'-\lambda)^{5/6}(\mu-\lambda')^{11/6}}\right]. \tag{69}$$

Используя неравенства (68) и (69) и доказанные неравенства (20), получаем неравенства (28) теми же приемами, как и неравенства (19) и (20).

Доказательство уравнений (33)

Ограничимся доказательством первого из этих уравнений, так как остальные доказываются совершенно аналогично. Достаточно рассмо-

треть предельный переход для поверхностного интеграла; для линейных интегралов он тривиален. Итак,

$$\frac{u_1'}{(\mu-\lambda)^{1/3}} = \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}\int\limits_{\mu_0}^{\mu} (\mu-\lambda')^{-1/6}(\mu'-\lambda)^{-1/6} F\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}; 7, \sigma\right) \cdot$$

$$\cdot \mathfrak{F}[u_0(\lambda_0, \mu_0; \lambda', \mu')]\, d\lambda' d\mu', \tag{70}$$

и пусть

$$\begin{matrix} \lambda \longrightarrow \bar{\lambda} \\ \mu \longrightarrow \bar{\lambda} \end{matrix} \quad (\lambda_0 < \bar{\lambda} < \mu_0). \tag{71}$$

Рассмотрим разность

$$\iint\limits_{S_{\lambda,\mu}} (\mu-\lambda')^{-1/6}(\mu'-\lambda)^{-1/6} F\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}; 1; \sigma\right) \mathfrak{F}[u_0(\lambda_0, \mu_0; \lambda', \mu')]\, d\lambda'\, d\mu' -$$

$$-\iint\limits_{S_{\bar{\lambda},\bar{\lambda}}} (\lambda-\lambda')^{-1/6}(\mu'-\bar{\lambda}) \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{5}{6}\right)} \mathfrak{F}[u_0(\lambda_0, \mu_0; \lambda', \mu')]\, d\lambda'\, d\mu', \tag{72}$$

где

$$\sigma = \frac{(\lambda-\lambda')(\mu'-\lambda)}{(\mu-\lambda')(\mu'-\lambda)}, \tag{72a}$$

и область $S_{\lambda,\mu}$ определяется неравенствами

$$\lambda_0 < \lambda' < \lambda; \quad \mu < \mu' < \mu_0. \tag{72b}$$

Разделим область $S_{\bar{\lambda},\bar{\lambda}}$ на две части —

$$S_{\bar{\lambda},\bar{\lambda}} = S_1 + S_2, \tag{73}$$

где S_1 определяется неравенствами

$$\lambda_0 < \lambda' < \bar{\lambda} - \delta, \quad \bar{\lambda} + \delta < \mu' < \mu_0. \tag{73a}$$

Число δ $(\delta > 0)$ должно быть настолько малым, чтобы было выполнено неравенство

$$\left|\iint\limits_{S_2} (\bar{\lambda}-\lambda')^{-1/6}(\mu'-\bar{\lambda})^{-1/6} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{5}{6}\right)} \mathfrak{F}[u_0(\lambda_0, \mu_0; \lambda', \mu')]\, d\lambda'\, d\mu'\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{74}$$

где ε — наперед заданная малая величина.

Пусть S_3 будет частью прямоугольника $S_{\lambda,\mu}$, содержащей все точки, для которых выполнено хотя бы одно из неравенств

$$\mu < \mu' < \mu + 2\delta, \quad \lambda - 2\delta < \lambda' < \lambda. \tag{75}$$

Если точка (λ, μ) достаточно близка к $(\bar{\lambda}, \lambda)$, то S_3 содержит все точки области $S_{\lambda,\mu}$, не лежащие в S_1. Пусть δ выбрано настолько малым, чтобы

$$\left|\iint\limits_{S_3} (\mu-\lambda')^{-1/6}(\mu-\lambda)^{-1/6} F\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}; 1; \sigma\right) \mathfrak{F}[u_0(\lambda_0, \mu_0, \lambda', \mu')] \cdot\right.$$

$$\left. \cdot\, d\lambda'\, d\mu' \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{76}$$

Зафиксировав δ, можно выбрать настолько малую окрестность точки $(\overline{\lambda}, \overline{\lambda})$, чтобы для точек (λ, μ), лежащих в ней, и точек (λ', μ'), лежащих в S_1 (и, впрочем, произвольных), было соблюдено неравенство

$$\left| (\mu-\lambda')^{-1/6}(\mu'-\lambda)^{-1/6} F\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}; 1; \sigma\right) - \right.$$

$$\left. -(\overline{\lambda}-\lambda')^{-1/6}(\mu'-\lambda)^{-1/6} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{5}{6}\right)} \right| < \frac{\varepsilon}{3M}, \tag{77}$$

где

$$\iint_{S_1} |\mathfrak{F}[u_0(\lambda_0, \mu_0; \lambda', \mu')]|\, d\lambda'\, d\mu' < M. \tag{77a}$$

Тогда выражение (72) по абсолютной величине будет меньше ε, откуда и следует первое уравнение (33).

Из уравнений (33) и оценок (19), (28) получаем (для достаточно малых $\mu_0 - \lambda_0$)

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{\mu-\lambda\to 0} \frac{u}{(\mu-\lambda)^{1/3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{\mu-\lambda\to 0} \frac{u_n}{(\mu-\lambda)^{1/3}},\\
&\lim_{\mu-\lambda\to 0}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial\lambda} + \frac{u}{6(\mu-\lambda)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{\mu-\lambda\to 0}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u_n}{\partial\lambda} + \frac{u_n}{6(\mu-\lambda)}\right),\\
&\lim_{\mu-\lambda\to 0}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial\mu} - \frac{u}{6(\mu-\lambda)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{\mu-\lambda\to 0}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u_n}{\partial\mu} - \frac{u_n}{6(\mu-\lambda)}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{78}$$

откуда следует существование пределов (26). Легко показать, что сходимость правых частей к своим пределам при $\lambda_0 + \varepsilon < \lambda < \mu_0 - \varepsilon$ будет равномерной.

Доказательство уравнения (7)

Чтобы осуществить предельный переход от уравнения (23) к уравнению (7), выделим вокруг точек (λ_0, λ_0) и (μ_0, μ_0) окрестности настолько малые, чтобы для данного решения z и тех частей отрезка (P_1P_2), которые лежат внутри этих окрестностей (для любого ε), соответствующие части интеграла (23) были по абсолютной величине $< \frac{\delta}{3}$. Это возможно благодаря неравенствам (29) и неравенству

$$\frac{u}{(\mu-\lambda)^{1/3}} = O(1)\,(\mu_0-\lambda)^{-1/6}\,(\mu-\lambda_0)^{-1/6}, \tag{79}$$

вытекающему из оценок (19).

Что же касается подинтегральной функции интеграла (23), то она сходится равномерно к подинтегральной функции интеграла (7) (если там в качестве переменной интегрирования оставить λ) во всей области,

лежащей вне указанных окрестностей. Следовательно, разность соответствующих интегралов при достаточно малом ε в формуле (22) будет меньше $\frac{\delta}{3}$. Тем самым формула (7) доказана для заданного решения z и, следовательно, его единственность.

Пусть теперь, наоборот, заданы значения $\tau(\lambda)$ и $\nu(\lambda)$, причем $\nu(\lambda)$ должно быть непрерывной функцией от λ на отрезке $\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \mu_0$, а $\tau(\lambda)$ должно удовлетворять условию Hölder'а с показателем, большим $\frac{2}{3}$

$$|\tau(\lambda_1) - \tau(\lambda_2)| < A\,|\lambda_1 - \lambda_2|^{\eta}, \quad \text{где} \quad \frac{2}{3} < \eta. \tag{80}$$

Покажем, что формула (7) дает в этом случае предельное решение уравнения (9), причем

$$\lim_{y\to 0} z(x, y) = \tau(\lambda), \qquad z_y(x, 0) = \nu(\lambda). \tag{81}$$

Что уравнение (7) дает предельное решение уравнения (9), очевидно: чтобы убедиться в этом, достаточно аппроксимировать $\tau(\lambda)$ и $\nu(\lambda)$ аналитическими функциями. Остается доказать уравнения (81).

Согласно неравенствам (19) и (28)

$$\left.\begin{aligned} g(\lambda_0, \mu_0; t) &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right)} t^{-5/6}(1-t)^{-5/6} + O\left[(\mu_0-\lambda_0)^{2/3}\right] t^{-5/6}(1-t)^{-5/6}, \\ h(\lambda_0, \mu_0; t) &= -\left(\frac{3}{4}\right)^{2/3} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{5}{6}\right)} (\mu_0-\lambda_0)^{2/3} t^{-1/6}(1-t)^{-1/6} + \\ &\quad + O\left[(\mu_0-\lambda_0)^{4/3}\right] t^{-1/6}(1-t)^{-1/6}. \end{aligned}\right\} \tag{82}$$

Следовательно, если $\lambda_0 \to \bar{\lambda}_0$, $\mu_0 \to \bar{\lambda}_0$, то

$$\lim_{y\to 0} z_y(x, y) = \tau(\bar{\lambda}_0) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right)} \int_0^1 \frac{dt}{t^{1/6}(1-t)^{5/6}} = \tau(\bar{\lambda}_0) \quad [= z_y(x, 0)], \tag{83}$$

что и требовалось доказать.

Чтобы получить значение $z_y(x, 0)$, исследуем подробнее остаточный член выражения $g(\lambda_0, \mu_0; t)$. Пусть

$$g_1(\lambda_0, \mu_0; t) = \lim_{\mu-\lambda\to 0} \left[2Lu_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial u_1}{\partial \lambda} - \frac{1}{2}\frac{\partial u_1}{\partial \mu}\right](\mu_0 - \lambda_0). \tag{84}$$

Тогда

$$g(\lambda_0, \mu_0; t) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right)} t^{-5/6}(1-t)^{-5/6} + g_1(\lambda_0, \mu_0; t) + $$
$$+ O\left[(\mu_0-\lambda_0)^{4/3}\right] t^{-1/6}(1-t)^{-1/6}. \tag{85}$$

С другой стороны, рассмотрим функцию $\hat{g}(\lambda_0, \mu_0; t)$, аналогичную g, но соответствующую уравнению

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+b(x, y)\frac{\partial z}{\partial y}=0. \tag{86}$$

Аналогично (85),

$$\hat{g}(\lambda_0, \mu_0; t)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right)}t^{-5/6}(1-t)^{-5/6}+\hat{g}_1(\lambda_0, \mu_0; t)+$$
$$+O[(\mu_0-\lambda_0)^{4/3}]\,t^{-1/6}(1-t)^{-1/6}. \tag{87}$$

Найдем теперь решение уравнения (68) с начальными данными

$$\hat{\tau}(\lambda)\equiv 1;\quad \hat{\nu}(\lambda)\equiv 0. \tag{88}$$

Это решение, очевидно, тождественно равно единице, но с другой стороны

$$1\equiv\hat{z}(\lambda_0, \mu_0)\equiv\int_0^1 \hat{g}(\lambda_0, \mu_0; t)\,dt. \tag{89}$$

Отсюда

$$\int_0^1 \hat{g}_1(\lambda_0, \mu_0; t)\,dt+O[(\mu_0-\lambda_0)^{4/3}]\equiv 0 \tag{90}$$

и

$$(\mu_0-\lambda_0)^{-2/3}\int_0^1 \hat{g}_1(\lambda_0, \mu_0; t)\,dt=O[(\mu_0-\lambda_0)^{2/3}]. \tag{91}$$

Далее, из способа образования функций g_1 и $\hat{g}_1$ видно, что

$$g_1(\lambda_0, \mu_0; t)-\hat{g}_1(\lambda_0, \mu_0; t)=O(1)(\mu_0-\lambda_0)^{4/3}t^{-1/6}(1-t)^{-1/6}. \tag{92}$$

Из (91) и (92) следует

$$(\mu_0-\lambda_0)^{-2/3}\int_0^1 g_1(\lambda_0, \mu_0; t)\,dt=O[(\mu_0-\lambda_0)^{2/3}]. \tag{93}$$

Перейдем теперь к вычислению $z_y(x, 0)$. Имеем

$$\frac{z(\bar{x}, y)-z(\bar{x}, 0)}{y}=-\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3}(\mu_0-\lambda_0)^{-2/3}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right)}\int_0^1[\tau(\lambda_0+(\mu_0-\lambda_0)t)-\right.$$
$$-\tau(\bar{\lambda}_0)]\,t^{-5/6}(1-t)^{-5/6}\,dt+$$
$$+\tau(\bar{\lambda}_0)\int_0^1 g_1(\lambda_0, \mu_0; t)\,dt+\int_0^1[\tau(\lambda_0+(\mu_0-\lambda_0)t)-\tau(\bar{\lambda}_0)]\,g_1(\lambda_0, \mu_0; t)\,dt+$$
$$+O[(\mu_0-\lambda_0)^{4/3}]\int_0^1\tau[\lambda_0+(\mu_0-\lambda_0)t]\,t^{-1/6}(1-t)^{-1/6}\,dt-$$

$$-\nu(\lambda)\left(\frac{3}{4}\right)^{2/3}(\mu_0-\lambda_0)^{2/3}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{5}{6}\right)}\int_0^1\frac{dt}{t^{1/6}(1-t)^{1/6}}+$$

$$+\left(\frac{3}{4}\right)^{2/3}(\mu_0-\lambda_0)^{2/3}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{5}{6}\right)}\int_0^1\frac{\nu(\lambda_0+(\mu_0-\lambda_0)t)-\nu(\lambda_0)}{t^{1/6}(1-t)^{1/6}}dt+$$

$$\left.+O\left[(\mu_0-\lambda_0)^{4/3}\right]\int_0^1\frac{\nu(\lambda_0+(\mu_0-\lambda_0)t)}{t^{1/6}(1-t)^{1/6}}dt\right\}=$$

$$=O\left[(\mu_0-\lambda_0)^{\eta-2/3}\right]+O\left[(\mu_0-\lambda_0)^{2/3}\right]+O\left[(\mu_0-\lambda_0)^{\eta}\right]+$$

$$+O\left[(\mu_0-\lambda_0)^{2/3}\right]+\nu(\bar{\lambda})+O(\varepsilon)+O\left[(\mu_0-\lambda_0)^{2/3}\right]. \tag{94}$$

Отсюда следует доказуемая формула

$$z_y(x, 0)=\nu(\lambda). \tag{95}$$

Обобщение применительно к неоднородным уравнениям

Формула (7) легко распространяется на уравнения вида

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+b(x, y)\frac{\partial z}{\partial y}+c(x, y)z=d(x, y), \tag{96}$$

где $d(x, y)$ — непрерывная функция. Решение будет, очевидно,

$$z(x_0, y_0)=\int_0^1 g(\lambda_0, \mu_0; t)\,\tau[\lambda_0+(\mu_0-\lambda_0)t]\,dt+$$

$$+\int_0^1 h(\lambda_0, \mu_0; t)\,\nu[\lambda_0+(\mu_0-\lambda_0)t]\,dt-$$

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3}\iint\limits_{\lambda_0<\lambda<\mu<\mu_0}u(\lambda_0, \mu_0; \lambda, \mu)\frac{d(x, y)}{(\mu-\lambda)^{2/3}}d\lambda\,d\mu. \tag{97}$$

Непрерывность и дифференцируемость решения

Можно показать, что полученное предельное решение уравнения (1) непрерывно, если функции $\tau(\lambda)$ и $\nu(\lambda)$ непрерывны на замкнутом интервале $\lambda_0\leqslant\lambda\leqslant\mu_0$. Если $\tau(\lambda)$ и $\nu(\lambda)$ обладают в этом интервале непрерывными производными до порядка n включительно, то решение уравнения (1) обладает непрерывными производными до порядка n включительно по x_0 и y_0. В частности, если $\tau(\lambda)$ и $\nu(\lambda)$ имеют ограниченные вторые производные, то наше предельное решение будет решением уравнения (1) в собственном смысле слова. В отношении неоднородного уравнения (97) для получения тех же свойств решения требуется (соответственно) непрерывность функции $d(x, y)$ и наличие у нее ограниченных производных до n-го порядка включительно.

Для доказательства необходимо прежде всего показать, что существуют производные

$$\left.\begin{aligned}
&(\mu_0-\lambda_0)^{1/3}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_0}-\frac{\partial}{\partial\mu_0}\right)g(\lambda_0,\mu_0;t)=\frac{O(1)}{t^{5/6}(1-t)^{5/6}},\\
&(\mu_0-\lambda_0)^{1/3}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_0}-\frac{\partial}{\partial\mu_0}\right)h(\lambda_0,\mu_0;t)=\frac{O(1)}{t^{1/6}(1-t)^{1/6}},\\
&\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_0}+\frac{\partial}{\partial\mu_0}\right)g(\lambda_0,\mu_0;t)=\frac{O(1)}{t^{5/6}(1-t)^{5/6}}(\mu_0-\lambda_0)^{2/3},\\
&\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_0}+\frac{\partial}{\partial\mu_0}\right)h(\lambda_0,\mu_0;t)=\frac{O(1).}{t^{1/6}(1-t)^{1/6}}(\mu_0-\lambda_0)^{4/3}
\end{aligned}\right\}\tag{98}$$

и аналогичные неравенства для высших производных, которые все существуют.

Докажем формулы (98). Введем для этой цели, кроме переменной t, еще переменные s, s', t':

$$\left.\begin{aligned}
&s=\frac{\mu_0-\mu}{\mu_0-\lambda_0}, \qquad s'=\frac{\mu_0-\mu'}{\mu_0-\lambda_0},\\
&t=\frac{\lambda-\lambda_0}{\mu_0-\lambda_0}; \qquad t'=\frac{\lambda'-\lambda_0}{\mu_0-\lambda_0}.
\end{aligned}\right\}\tag{99}$$

Тогда независимые переменные с встречающихся в наших формулах гипергеометрических функций становятся независимыми от λ_0 и μ_0

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{(\lambda'-\lambda_0)(\mu_0-\mu')}{(\mu_0-\lambda')(\mu'-\lambda_0)}=\frac{s't'}{(1-s')(1-t')},\\
&\frac{(\lambda-\lambda')(\mu'-\mu)}{(\mu'-\lambda)(\mu-\lambda')}=\frac{(t-t')(s-s')}{(1-t-s')(1-s-t')}.
\end{aligned}\right\}\tag{100}$$

Пределы интегрирования для s' и t', если ввести эти переменные вместо μ' и λ', также независимы от λ_0 и μ_0: $x'=\lambda_0$ соответствует $t'=0$; $x'=\lambda\to t'=t$; $\mu'=\mu_0\to s'=0$; $\mu'=\mu\to s'=s$.

Рассмотрим теперь выражения $\mathfrak{F}[u_n(\lambda_0,\mu_0;\lambda,\mu)](\mu_0-\lambda_0)^2$ в зависимости от λ_0, μ_0, s, t:

$$(\mu_0-\lambda_0)^2\,\mathfrak{F}[u_n(\lambda_0,\mu_0;\lambda,\mu)]=G_n(\lambda_0,\mu_0;s,t).\tag{101}$$

Докажем прежде всего, что

$$\left.\begin{aligned}
&(\mu_0-\lambda_0)^{1/3}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_0}-\frac{\partial}{\partial\mu_0}\right)G_0(\lambda_0,\mu_0;s,t)=\\
&\quad=O(t)(\mu_0-\lambda_0)^{4/3}\{(\mu-\lambda)^{-1/3}(\mu_0-\lambda)^{-1/6}(\mu-\lambda_0)^{-1/6}+\\
&\quad+(\mu_0-\lambda)^{7/6}(\mu-\lambda_0)^{-1/6}+(\mu_0-\lambda)^{-1/6}(\mu-\lambda_0)^{-7/6}+\\
&\quad+(\mu-\lambda)^{-1/3}(\mu_0-\lambda_0)^{2/3}(\mu_0-\mu)(\mu_0-\lambda)^{-11/6}(\mu-\lambda_0)^{-5/6}+\\
&\quad+(\mu_0-\lambda_0)^{2/3}+(\mu-\lambda)^{-1/3}(\lambda-\lambda_0(\mu_0-\lambda)^{-5/6}(\mu-\lambda_0)^{-11/6}\},\\
&(\mu_0-\lambda_0)^{1/3}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_0}-\frac{\partial}{\partial\mu_0}\right)G_1(\lambda_0;\mu_0;s,t)=\\
&\quad=O(1)(\mu_0-\lambda_0)^{8/3}(\mu_0-\lambda)^{-5/6}(\mu-\lambda_0)^{-5/6}(\mu-\lambda)^{-1/3},\\
&(\mu_0-\lambda_0)^{1/3}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_0}-\frac{\partial}{\partial\mu_0}\right)G_2(\lambda_0,\mu_0;s,t)=\\
&\quad=O(1)(\mu-\lambda)^{-1/3}(\mu_0-\lambda)^{-1/}(\mu-\lambda_0)^{-1/6}(\mu_0-\lambda_0)^2,\\
&(\mu_0-\lambda_0)^{1/3}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_0}-\frac{\partial}{\partial\mu_0}\right)G_n(\lambda_0,\mu_0;s,t)=\\
&\quad=O(1)(\mu-\lambda)^{-1/3}[B(\mu_0-\lambda_0)]^{\frac{2n+1}{3}}\qquad(n=3,4,\ldots);
\end{aligned}\right\}\tag{102}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_0}+\frac{\partial}{\partial\mu_0}\right) G_0(\lambda_0, \mu_0;\ s, t) = O\{(\mu-\lambda)^{+1/3}(\mu_0-\lambda)^{-1/6}(\mu-\lambda_0)^{-1/6}+\\
&\quad+(\mu_0-\lambda)^{-7/6}(\mu-\lambda_0)^{-1/6}+(\mu_0-\lambda)^{-1/6}(\mu-\lambda_0)^{-7/6}+\\
&\quad+(\mu-\lambda)^{-1/3}(\mu_0-\lambda_0)^{2/3}(\mu_0-\mu)(\mu_0-\lambda)^{-11/6}(\mu-\lambda_0)^{-5/6}+\\
&\quad+(\mu-\lambda)^{-1/3}(\mu_0-\lambda_0)^{2/3}(\lambda-\lambda_0)(\mu_0-\lambda)^{-5/6}(\mu-\lambda_0)^{-11/6}\}(\mu_0-\lambda_0)^{2},\\
&\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_0}+\frac{\partial}{\partial\mu_0}\right) G_1(\lambda_0, \mu_0;\ s, t) =\\
&\quad= O(1)(\mu_0-\lambda_0)^{10/3}(\mu-\lambda)^{-1/3}(\mu_0-\lambda)^{-5/6}(\mu-\lambda_0)^{-5/6},\\
&\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_0}+\frac{\partial}{\partial\mu_0}\right) G_2(\lambda_0, \mu_0;\ s, t) =\\
&\quad= O(1)(\mu_0-\lambda_0)^{8/3}(\mu-\lambda)^{-1/3}(\mu_0-\lambda)^{-1/6}(\mu-\lambda_0)^{-1/6},\\
&\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_0}+\frac{\partial}{\partial\mu_0}\right) G_n(\lambda_0, \mu_0;\ s, t) =\\
&\quad= O(1)(\mu-\lambda)^{-1/3}[B(\mu_0-\lambda_0)]^{\frac{2n+3}{3}} \qquad (n=3,\ 4,\ \ldots).
\end{aligned}\right\}\quad(103)
$$

Для $n=0$ эти формулы получаются непосредственно из выражений для $G_0(\lambda_0, \mu_0; s, t)$. Для $n=1, 2, \ldots$ они получаются из тех же оценок, которые выведены нами для $\mathfrak{F}[u_n]$, если учесть, что после введения переменных s' и t' можно дифференцировать под знаком интеграла. То же самое имеет место для высших производных.

Если выразить величины

$$
\left.\begin{aligned}
&g_n(\lambda_0, \mu;\ t) = (\mu_0-\lambda_0)\lim_{\mu-\lambda\to 0}\left\{2Lu_n+\frac{1}{2}\frac{\partial u_n}{\partial\lambda}-\frac{1}{2}\frac{\partial u_n}{\partial\mu}\right\},\\
&h_n(\lambda_0, \mu;\ t) = -(\mu_0-\lambda_0)\cdot\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\lim_{\mu-\lambda\to 0}\frac{u_n}{(\mu-\lambda)^{1/3}}
\end{aligned}\right\}\quad(104)
$$

на основе формул (33) посредством выражений для G_n, то отсюда вытекают формулы

$$
\left.\begin{aligned}
&(\mu_0-\lambda_0)^{1/3}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_0}-\frac{\partial}{\partial\mu_0}\right) g_0(\lambda_0; \mu_0;\ t) = 0,\\
&(\mu_0-\lambda_0)^{1/3}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_0}-\frac{\partial}{\partial\mu_0}\right) g_1(\lambda_0, \mu_0;\ t) = \frac{O(1)}{t^{5/6}(1-t)^{5/6}},\\
&(\mu_0-\lambda_0)^{1/3}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_0}-\frac{\partial}{\partial\mu_0}\right) g_2(\lambda_0, \mu_0;\ t) = \frac{O(1)(\mu_0-\lambda_0)^{2/3}}{t^{1/6}(1-t)^{1/6}},\\
&(\mu_0-\lambda_0)^{1/3}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_0}-\frac{\partial}{\partial\mu_0}\right) g_n(\lambda_0, \mu_0;\ t) =\\
&\qquad\qquad = O(1)[B(\mu_0-\lambda_0)]^{\frac{2n-2}{3}} \quad (n=3,\ 4,\ \ldots).
\end{aligned}\right\}\quad(105)
$$

Для $\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_0}-\frac{\partial}{\partial\mu_0}\right) g_n(\lambda_0, \mu_0;\ t)$ получаем такие же формулы, но правые части умножаем на $(\mu_0-\lambda_0)^{2/3}$; для $h_n(\lambda_0, \mu_0;\ t)$ имеем

$$\left.\begin{aligned}
&(\mu_0-\lambda_0)^{1/3}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_0}-\frac{\partial}{\partial\mu_0}\right) h_0(\lambda_0, \mu_0;\ t)=\frac{O(1)}{t^{1/6}(1-t)^{1/6}},\\
&(\mu_0-\lambda_0)^{1/3}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_0}-\frac{\partial}{\partial\mu_0}\right) h_1(\lambda_0, \mu_0;\ t)=\frac{O(1)(\mu_0-\lambda_0)^{2/3}}{t^{1/6}(1-t)^{1/6}},\\
&(\mu_0-\lambda_0)^{1/3}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_0}-\frac{\partial}{\partial\mu_0}\right) h_n(\lambda_0, \mu_0;\ t)=\\
&\qquad=O(1)\left[B(\mu_0-\lambda_0)\right]^{\frac{2n}{3}} \qquad (n=2,\ 3,\ \ldots)
\end{aligned}\right\} \tag{106}$$

и также формулы для $\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_0}+\frac{\partial}{\partial\mu_0}\right) h_n(\lambda_0, \mu_0;\ t)$, но правые части умножены на $(\mu_0-\lambda_0)^{2/3}$ [см. (19), (28)]. Отсюда следует существование производных g и h по λ_0 и μ_0 и оценки (97) и такие же оценки для высших производных.

Отметим, что соответствующие разностные отношения сходятся к производным по x_0 и y_0 равномерно в зависимости от t, если только $\delta<t<1-\delta$. Для производной n-го порядка это получается при помощи теоремы о среднем и соответствующей оценки для производных $n+1$-го порядка.

Отсюда следует легко непрерывность решения, если $\tau(\lambda)$ и $\nu(\lambda)$ непрерывны на отрезке $\lambda_0\leqslant\lambda\leqslant\mu_0$. В самом деле, если

$$\varepsilon=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2},$$

то

$$\begin{aligned}
z(\lambda_1, \mu_1)-z(\lambda_0, \mu_0)=&\int_0^1\{\tau[\lambda_1+(\mu_1-\lambda_1)t]-\tau[\lambda_0+(\mu_0-\lambda_0)t]\}\frac{O(1)\,dt}{t^{5/6}(1-t)^{5/6}}+\\
&+\int_0^1\tau[\lambda_0+(\mu_0-\lambda_0)\,t]\,\frac{O(\varepsilon)\,dt}{t^{5/6}(1-t)^{5/6}}+\\
&+\int_0^1\{\nu[\lambda_1+(\mu_1-\lambda_1)\,t]-\nu[\lambda_0+(\mu_0-\lambda_0)\,t]\}\,\frac{O(1)(\mu_0-\lambda_0)^{2/3}}{t^{1/6}(1-t)^{1/6}}\,dt+\\
&+\int_0^1\nu[\lambda_0+(\mu_0-\lambda_0)\,t]\,\frac{O(\varepsilon)\,dt}{t^{1/6}(1-t)^{1/6}}.
\end{aligned} \tag{107}$$

Из замечания о равномерной сходимости разностных отношений функций g и h и их производных при $\delta<t<1-\delta$ вытекает возможность дифференцирования формул (7) под знаком интеграла. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda_0}=\int_0^1 \tau'[\lambda_0+(\mu_0-\lambda_0)t](1-t)g(\lambda_0,\mu_0;t)\,dt+$$

$$+\int_0^1 \tau[\lambda_0+(\mu_0-\lambda_0)t]\,g_{\lambda_0}(\lambda_0,\mu_0;t)\,dt+$$

$$+\int_0^1 \nu'[\lambda_0+(\mu_0-\lambda_0)t](1-t)h(\lambda_0,\mu_0;t)\,dt+$$

$$+\int_0^1 \nu[\lambda_0+(\mu_0-\lambda_0)t]\,h_{\lambda_0}(\lambda_0,\mu_0;t)\,dt \qquad (108)$$

и аналогичную формулу для $\frac{\partial z}{\partial \mu_0}$. Из оценок (106) вытекает ограниченность производных по x_0 и y_0.

Таким образом, наши утверждения для однородного уравнения (9) доказаны. Соответствующие утверждения для неоднородного уравнения (95) вытекают из оценок

$$\left.\begin{aligned}
&v(\lambda_0,\mu_0;s,t)=O(1)\frac{(1-s-t)^{1/3}}{(1-s)^{1/6}(1-t)^{1/6}}(\mu_0-\lambda_0)^2,\\
&\qquad\qquad \text{где } v(\lambda_0,\mu_0,s,t)=u(\lambda_0,\mu_0,\lambda,\mu)(\mu_0-\lambda_0)^2,\\
&(\mu_0-\lambda_0)^{1/3}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_0}-\frac{\partial}{\partial\mu_0}\right)v(\lambda_0,\mu_0;s,t)=O(1)\frac{(1-s-t)^{1/3}}{(1-s)^{1/6}(1-t)^{1/6}}(\mu_0-\lambda_0)^{4/3},\\
&\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_0}+\frac{\partial}{\partial\mu_0}\right)v(\lambda_0,\mu_0;s,t)=O(1)(\mu_0-\lambda_0)^2\frac{(1-s-t)^{1/3}}{(1-s)^{1/6}(1-t)^{1/6}}
\end{aligned}\right\}(109)$$

и такие же оценки для высших производных, если учесть что при использовании s, t в качестве переменных в двойном интеграле формулы (96) становится возможным дифференцирование под знаком интеграла.

Распространение полученных результатов на случай общего уравнения смешанного типа

В настоящее время нам удалось распространить полученные результаты на общее уравнение смешанного типа

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}+cz=0. \qquad (110)$$

Как и в частном случае $a=0$, отсюда легко получается решение задачи для неоднородного уравнения

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}+cz=d. \qquad (110a)$$

Для этой цели перепишем сперва уравнение (110) в характеристических координатах λ, μ. Получим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\lambda\,\partial\mu}+\frac{1}{6(\mu-\lambda)}\left(\frac{\partial z}{\partial\lambda}-\frac{\partial z}{\partial\mu}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}\frac{b}{(\mu-\lambda)^{1/3}}\left(\frac{\partial z}{\partial\lambda}-\frac{\partial z}{\partial\mu}\right)-$$
$$-\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3}\frac{a}{(\mu-\lambda)^{2/3}}\left(\frac{\partial z}{\partial\lambda}+\frac{\partial z}{\partial\mu}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3}\frac{cz}{(\mu-\lambda)^{2/3}}=0. \tag{111}$$

Уравнение (110a) примет вид

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\lambda\,\partial\mu}+\frac{1}{6(\mu-\lambda)}\left(\frac{\partial z}{\partial\lambda}-\frac{\partial z}{\partial\mu}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}\frac{b}{(\mu-\lambda)^{1/3}}\left(\frac{\partial z}{\partial\lambda}-\frac{\partial z}{\partial\mu}\right)-$$
$$-\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3}\frac{a}{(\mu-\lambda)^{2/3}}\left(\frac{\partial z}{\partial\lambda}+\frac{\partial z}{\partial\mu}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3}\frac{cz}{(\mu-\lambda)^{2/3}}=$$
$$=-\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3}\frac{d}{(\mu-\lambda)^{2/3}}. \tag{111a}$$

Если ввести обозначения

$$\left.\begin{aligned}
A&=\frac{1}{6(\mu-\lambda)}-\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}\frac{b}{(\mu-\lambda)^{1/3}}-\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3}\frac{a}{(\mu-\lambda)^{2/3}}=\\
&\qquad=\frac{1}{6(\mu-\lambda)}+\delta A,\\
B&=-\frac{1}{6(\mu-\lambda)}+\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}\frac{b}{(\mu-\lambda)^{1/3}}-\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3}\frac{a}{(\mu-\lambda)^{2/3}}=\\
&\qquad=-\frac{1}{6(\mu-\lambda)}+\delta B,\\
C&=-\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3}\frac{c}{(\mu-\lambda)^{2/3}},\quad D=-\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3}\frac{d}{(\mu-\lambda)^{2/3}},
\end{aligned}\right\} \tag{112}$$

то уравнения (111) и (111a) запишутся в виде

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\lambda\,\partial\mu}+A\frac{\partial z}{\partial\lambda}+B\frac{\partial z}{\partial\mu}+Cz=0, \tag{113}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\lambda\,\partial\mu}+A\frac{\partial z}{\partial\lambda}+B\frac{\partial z}{\partial\mu}+Cz=D, \tag{113a}$$

Функция Римана $u(\lambda_0, \mu_0; \lambda, \mu)$ уравнения (111) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\lambda\,\partial\mu}-\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}-\frac{\partial}{\partial\mu}\right)\left(\frac{u}{6(\mu-\lambda)}\right)=-\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}-\frac{\partial}{\partial\mu}\right)\left[\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}\frac{bu}{(\mu-\lambda)^{1/3}}\right]-$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}+\frac{\partial}{\partial\mu}\right)\left[\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3}\frac{au}{(\mu-\lambda)^{2/3}}\right]+\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3}\frac{cu}{(\mu-\lambda)^{2/3}}=$$
$$=\mathfrak{F}\left[u(\lambda_0, \mu_0; \lambda, \mu)\right]. \tag{114}$$

Как и в случае $a=0$, функция Римана может быть представлена в виде ряда

$$u=u_0+u_1+u_2+\ldots, \tag{115}$$

где

$$u_0=\overline{u}(\lambda_0, \mu_0; \lambda, \mu)=\frac{(\mu-\lambda)^{1/3}}{(\mu_0-\lambda)^{1/6}(\mu-\lambda_0)^{1/6}}F\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}; 1; \sigma\right),$$

$$\left[\sigma=\frac{(\lambda-\lambda_0)(\mu_0-\mu)}{(\mu_0-\lambda)(\mu-\lambda_0)}\right], \tag{116}$$

$$u_1=\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}\int\limits_{\mu_0}^{\mu}\overline{u}(\lambda',\mu';\ \lambda,\mu)\,\mathfrak{F}[u_0(\lambda_0,\mu_0;\ \lambda',\mu')]\,d\lambda'\,d\mu'+$$

$$+\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}\overline{u}(\lambda',\mu_0;\ \lambda,\mu)\left(\frac{\partial u_1}{\partial\lambda'}+\frac{u_1}{6(\mu_0-\lambda')}\right)_{|\mu'=\mu_0}d\lambda'+$$

$$+\int\limits_{\mu_0}^{\mu}\overline{u}(\lambda_0,\mu';\ \lambda,\mu)\left(\frac{\partial u_1}{\partial\mu'}-\frac{u_1}{6(\mu'-\lambda)_0}\right)_{|\lambda'=\lambda_0}d\mu', \tag{116a}$$

$$u_{n+1}=\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}\int\limits_{\mu_0}^{\mu}\overline{u}(\lambda',\mu';\lambda,\mu)\,\mathfrak{F}[u_n(\lambda_0,\mu_0;\lambda',\mu')]\,d\lambda'\,d\mu'\ (n=1,2,\ldots). \tag{116b}$$

Выражения под скобками в линейных интегралах формулы (116a) можно при этом преобразовать, учитывая, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}+\frac{1}{6(\mu_0-\lambda)}\right)u_0(\lambda_0,\mu_0;\ \lambda,\mu_0)=0 \tag{117}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}-B(\lambda,\mu_0)\right)u(\lambda_0,\mu_0;\ \lambda,\mu_0)=0. \tag{118}$$

Отсюда следует, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}+\frac{1}{6(\mu_0-\lambda)}\right)u_1=\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}+\frac{1}{6(\mu_0-\lambda)}\right)u=+\delta Bu=$$

$$=+\delta B(\lambda,\mu_0)\left(\frac{\mu_0-\lambda}{\mu_0-\lambda_0}\right)^{1/6}e^{\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}\delta B d\lambda}=O(1)(\mu_0-\lambda)^{-1/2}(\mu_0-\lambda_0)^{-1/6}. \tag{119}$$

Аналогично

$$\left(\frac{\partial}{\partial\mu}-\frac{1}{6(\mu-\lambda_0)}\right)u_1=\delta A\cdot u=$$

$$=\delta A\left(\frac{\mu-\lambda_0}{\mu_0-\lambda_0}\right)^{1/6}e^{\int\limits_{\mu_0}^{\mu}\delta A d\mu}=O(1)(\mu-\lambda_0)^{-1/2}(\mu_0-\lambda_0)^{-1/6}. \tag{119a}$$

Для выражения $\mathfrak{F}[u_0(\lambda_0,\mu_0;\ \lambda,\mu)]$ легко получить оценку

$$\mathfrak{F}[u_0(\lambda_0,\mu_0;\ \lambda,\mu)]=O(1)(\mu-\lambda)^{-2/3}(\mu_0-\lambda)^{-5/6}(\mu-\lambda_0)^{-5/6}(\mu_0-\lambda_0)^{2/3}, \tag{120}$$

а для $\dfrac{u_0(\lambda_0,\mu_0;\lambda,\mu)}{(\mu-\lambda)^{1/3}}$ — оценку

$$\frac{u_0}{(\mu-\lambda)^{1/3}}=O(1)(\mu_0-\lambda)^{-1/6}(\mu-\lambda_0)^{-1/6}. \tag{121}$$

Применяя те же приемы, как и выше, получим

$$\frac{u_1}{(\mu-\lambda)^{1/3}}=O(1)(\mu_0-\lambda)^{-1/6}(\mu-\lambda_0)^{-1/6}(\mu_0-\lambda_0)^{1/3}, \tag{121a}$$

$$\frac{u_n}{(\mu-\lambda)^{1/3}}=O(1)[B(\mu_0-\lambda_0)]^{\frac{n-1}{3}}\quad(n=2,3,\ldots), \tag{121b}$$

где символ $O(1)$ дает границу, не зависящую от n, а B — постоянное число.

Соответственно для $\mathfrak{F}[u_n(\lambda_0, \mu_0;\ \lambda, \mu)]$ получаем следующие оценки:

$$\mathfrak{F}[u_1(\lambda_0, \mu_0;\ \lambda, \mu)] = O(1)(\mu-\lambda)^{-2/3}(\mu_0-\lambda)^{5/6}(\mu-\lambda_0)^{-5/6}(\mu_0-\lambda_0), \quad (120a)$$

$$\mathfrak{F}[u_2(\lambda_0, \mu_0;\ \lambda, \mu)] = O(1)(\mu-\lambda)^{-2/3}(\mu_0-\lambda)^{-2/3}(\mu-\lambda_0)^{-2/3}(\mu_0-\lambda_0), \quad (120b)$$

$$\mathfrak{F}[u_3(\lambda_0, \mu_0;\ \lambda, \mu)] = O(1)(\mu-\lambda)^{-2/3}(\mu_0-\lambda)^{1/3}(\mu-\lambda_0)^{-1/2}(\mu_0-\lambda_0), \quad (120c)$$

$$\mathfrak{F}[u_4(\lambda_0, \mu_0;\ \lambda, \mu)] = O(1)(\mu-\lambda)^{-2/3}(\mu_0-\lambda)^{-1/3}(\mu-\lambda_0)^{-1/3}(\mu_0-\lambda_0), \quad (120d)$$

$$\mathfrak{F}[u_5(\lambda_0, \mu_0;\ \lambda, \mu)] = O(1)(\mu-\lambda)^{-2/3}(\mu_0-\lambda)^{-1/6}(\mu-\lambda_0)^{-1/6}(\mu_0-\lambda_0), \quad (120e)$$

$$\mathfrak{F}[u_n(\lambda_0, \mu_0;\ \lambda, \mu)] = O(1)(\mu-\lambda)^{-2/3}[(\mu_0-\lambda_0)B]^{\frac{n-3}{3}} \quad (120f)$$

Отсюда

$$\frac{u}{(\mu-\lambda)^{1/3}} = O(1)(\mu_0-\lambda)^{-1/6}(\mu-\lambda_0)^{-1/6}, \quad (122)$$

$$\mathfrak{F}[u(\lambda_0, \mu_0;\ \lambda, \mu)] = O(1)(\mu-\lambda)^{-2/3}(\mu_0-\lambda)^{-5/6}(\mu-\lambda_0)^{-5/6}(\mu_0-\lambda_0)^{2/3}. \quad (123)$$

Далее оценим величины

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u_n}{\partial\lambda} + \frac{u_n}{6(\mu-\lambda)}.$$

Прежде всего

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u_0}{\partial\lambda} + \frac{u_0}{6(\mu-\lambda)} = O(1)\frac{(\mu_0-\lambda_0)^{2/3}}{(\mu_0-\lambda)^{5/6}(\mu-\lambda_0)^{5/6}}, \quad (124)$$

откуда при помощи тех же приемов, как и выше, получим оценки

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u_1}{\partial\lambda} + \frac{u_1}{6(\mu-\lambda)} = O(1)\frac{\mu_0-\lambda_0}{(\mu_0-\lambda)^{5/6}(\mu-\lambda_0)^{5/6}}; \quad (124a)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u_2}{\partial\lambda} + \frac{u_2}{6(\mu-\lambda)} = O(1)\frac{\mu_0-\lambda_0}{(\mu_0-\lambda)^{2/3}(\mu-\lambda_0)^{2/3}}; \quad (124b)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u_3}{\partial\lambda} + \frac{u_3}{6(\mu-\lambda)} = O(1)\frac{\mu_0-\lambda_0}{(\mu_0-\lambda)^{1/2}(\mu-\lambda_0)^{1/2}}; \quad (124c)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u_4}{\partial\lambda} + \frac{u_4}{6(\mu-\lambda)} = O(1)\frac{\mu_0-\lambda_0}{(\mu_0-\lambda)^{1/3}(\mu-\lambda_0)^{1/3}}; \quad (124d)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u_5}{\partial\lambda} + \frac{u_5}{6(\mu-\lambda)} = O(1)\frac{\mu_0-\lambda_0}{(\mu_0-\lambda)^{1/6}(\mu-\lambda_0)^{1/6}}; \quad (124e)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u_n}{\partial\lambda} + \frac{u_n}{6(\mu-\lambda)} = O(1)[B(\mu_0-\lambda_0)]^{\frac{n-5}{5}}. \quad (124f)$$

Отсюда следует оценка

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial\lambda} + \frac{u}{6(\mu-\lambda)} = O(1)\frac{(\mu_0-\lambda_0)^{2/3}}{(\mu_0-\lambda)^{5/6}(\mu-\lambda_0)^{5/6}} \quad (125)$$

и аналогично

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial\mu} + \frac{u}{6(\mu-\lambda)} = O(1)\frac{(\mu_0-\lambda_0)^{2/3}}{(\mu_0-\lambda)^{5/6}(\mu-\lambda_0)^{5/6}}, \quad (125a)$$

а также существование пределов

$$\lim_{\mu-\lambda\to 0}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial\lambda}+\frac{u}{6(\mu-\lambda)}\right)=O(1)\frac{(\mu_0-\lambda_0)^{2/3}}{(\mu_0-\lambda)^{5/6}(\lambda-\lambda_0)^{5/6}}, \tag{126}$$

$$\lim_{\mu-\lambda\to 0}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial\mu}+\frac{u}{6(\mu-\lambda)}\right)=O(1)\frac{(\mu_0-\lambda_0)^{2/3}}{(\mu_0-\lambda)^{5/6}(\lambda-\lambda_0)^{5/6}}. \tag{126a}$$

Из уравнений (122), (126), (126a) выводим, наконец, существование ядер $g(\lambda_0, \mu_0; t)$ и $h(\lambda_0, \mu_0; t)$, для которых мы, как и выше, получаем оценки *

$$g(\lambda_0, \mu_0; t)=\frac{O(1)}{t^{5/6}(1-t)^{5/6}}, \tag{127}$$

$$h(\lambda_0, \mu_0; t)=\frac{O(1)(\mu_0-\lambda_0)^{2/3}}{t^{1/6}(1-t)^{1/6}} \tag{128}$$

и решение задачи Коши в виде формулы

$$z(\lambda_0, \mu_0)=\int_0^1 g(\lambda_0, \mu_0; t)\,\tau[\lambda_0+(\mu_0-\lambda_0)t]\,dt+$$
$$+\int_0^1 h(\lambda_0, \mu_0; t)\,\nu[\lambda_0+(\mu_0-\lambda_0)t]\,dt. \tag{129}$$

Решение оказалось, таким образом, единственным.

Теорема существования, доказанная нами для случая $a=0$, остается в силе в той же формулировке, как и выше: если ν — непрерывная функция, а τ удовлетворяет условию Hölder'а с показателем $\eta>\frac{2}{3}$, то формула (129) дает предельное решение уравнения (129) с данными Коши $\tau(\lambda)$ и $\nu(\lambda)$.

Достаточно доказать уравнение

$$z_y(\overline{\lambda}_0, \overline{\lambda}_0)=\nu(\overline{\lambda}_0); \tag{130}$$

все остальное доказывается, как выше.

---

* Соотношения (127), (128), (129) получаются на основе формулы Римана

$$z(\lambda_0, \mu_0)=\frac{(\mu z)_{P_1}+(\mu z)_{P_2}}{2}+$$
$$+\int_{P_1}^{P_2} z\left(Au\,d\mu-Bu\,d\lambda+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial\lambda}d\lambda-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial\mu}d\mu\right)+\frac{1}{2}\int_{P_1}^{P_2} u\left(\frac{\partial z}{\partial\mu}d\mu-\frac{\partial z}{\partial\lambda}d\lambda\right),$$

из которой вытекает

$$g(\lambda_0, \mu_0; t)=\lim_{\mu-\lambda\to 0}\left[(A-B)u+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial\lambda}-\frac{\partial u}{\partial\mu}\right)\right](\mu_0-\lambda_0), \tag{127a}$$

$$h(\lambda_0, \mu_0; t)=-\lim_{\mu-\lambda\to 0}\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\frac{\mu}{(\mu-\lambda)^{1/3}}(\mu_0-\lambda_0). \tag{128a}$$

Для этой цели рассмотрим наряду с решением (129) предельное решение

$$\hat{z}(\lambda_0, \mu_0) = \int_0^1 \hat{g}(\lambda_0, \mu_0; t)\, \tau[\lambda_0 + (\mu_0 - \lambda_0)t]\, dt + $$
$$+ \int_0^1 \hat{h}(\lambda_0, \mu_0; t)\, \nu[\lambda_0 + (\mu_0 - \lambda_0)t]\, dt \tag{131}$$

уравнения

$$y\frac{\partial^2 \hat{z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{z}}{\partial y^2} + a\frac{\partial \hat{z}}{\partial x} + b\frac{\partial \hat{z}}{\partial y} = 0. \tag{132}$$

Очевидно,

$$\int_0^1 \hat{g}(\lambda_0, \mu_0; t)\, dt \equiv 1. \tag{133}$$

Чтобы распространить доказательство на общий случай, достаточно доказать оценку

$$g(\lambda_0, \mu_0; t) - \hat{g}(\lambda_0, \mu_0; t) = O(1)(\mu_0 - \lambda_0)^{4/3}. \tag{134}$$

Для этой цели рассмотрим разности

$$u_n - \hat{u}_n, \tag{135}$$

$$\mathfrak{F}[u_n] - \hat{\mathfrak{F}}[\hat{u}_n]. \tag{136}$$

Пользуясь приемами, аналогичными применявшимся нами при оценке функций u_n и $\mathfrak{F}[u_n]$, получим

$$\frac{u_n - \hat{u}_n}{(\mu - \lambda)^{1/3}} = O(1)(\mu_0 - \lambda_0)^{\frac{n+2}{3}} \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{137}$$

$$\mathfrak{F}[u_n] - \hat{\mathfrak{F}}[\hat{u}_n] = O(1)(\mu - \lambda)^{-2/3}(\mu_0 - \lambda_0)^{\frac{n}{3}} \quad (n = 0; 1, 2, \ldots), \tag{138}$$

откуда, в свою очередь, вытекает

$$\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{1}{6(\mu - \lambda)}\right)(u_n - \hat{u}_n) = O(1)(\mu_0 - \lambda_0)^{\frac{n}{3}} \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{139}$$

$$\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{1}{6(\mu - \lambda)}\right)(u_n - \hat{u}_n) = O(1)(\mu_0 - \lambda_0)^{\frac{n}{3}} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{139a}$$

Приняв во внимание выражения для $g, h, \hat{g}, \hat{h}$, получим на основе (137), (139), (139a) следующие формулы:

$$h(\lambda_0, \mu_0; t) - \hat{h}(\lambda_0, \mu_0; t) = O(1)(\mu_0 - \lambda_0)^2, \tag{140}$$

$$g(\mu_0, \lambda_0; t) - \hat{g}(\mu_0, \lambda_0; t) = O(1)(\mu_0 - \lambda_0)^{4/3}. \tag{141}$$

Теорема о дифференцируемости полученного решения и распространение решения на неоднородное уравнение (110а) получаются, как и выше.

Цаги, Новосибирск

Поступило
2. VI. 1943

ЛИТЕРАТУРА

[1] Darboux E., Leçons sur la théorie générale des surfaces, Paris, 1896.
[2] Чаплыгин С. А., Собрание сочинений, т. II, АН СССР, 1933; О газовых струях, гл. V.
[3] Христианович С. А., О сверхзвуковых течениях газа, Труды ЦАГИ, No. 543.
[4] Гурса Э., Курс математического анализа, т. III, М.—Л., 1933.
[5] Соболев С. Л., Общая теория диффракции волн на римановых поверхностях, Труды Мат. ин-та, IX (1935), 39—105.

F. FRANKL. ON CAUCHY'S PROBLEM FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF MIXED ELLIPTICO-HYPERBOLIC TYPE WITH INITIAL DATA ON THE PARABOLIC LINE

SUMMARY

In this note a generalization of a formula of Darboux is given, which solves Cauchy's problem for the equation

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \tag{1}$$

if the initial data are given on the line

$$y=0,$$

i. e. on the «parabolic» line, where the type of the equation is changed from elliptical to hyperbolic one.

The formula is

$$z(x, y)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right)}\int_0^1\frac{\tau[\lambda+(\mu-\lambda)t]\,dt}{t^{5/6}(1-t)^{5/6}}-$$

$$-\left(\frac{3}{4}\right)^{2/3}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{5}{6}\right)}(\mu-\lambda)^{2/3}\int_0^1\frac{\nu[\lambda+(\mu-\lambda)t]dt}{t^{1/6}(1-t)^{1/6}}, \tag{2}$$

where

$$\tau(x)=z(x, 0), \quad \nu(x)=z_y(x, 0) \tag{2a}$$

and

$$\left.\begin{aligned}\lambda&=x-\frac{2}{3}(-y)^{3/2},\\ \mu&=x+\frac{2}{3}(-y)^{3/2}.\end{aligned}\right\} \tag{2b}$$

The formula gives the solution of the problem for all negative values of y.

In this note I deal with Cauchy's problem for equations of the form

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+a(x, y)\frac{\partial z}{\partial x}+b(x, y)\frac{\partial z}{\partial y}+c(x, y)z=0. \tag{3}$$

As it was shown by F. Tricomi, all linear homogeneous equations satisfying very general conditions can be reduced to this form.

It is shown that the solution of Cauchy's problem for the equation (3) with initial conditions on the parabolic line is given by an expression of the form

$$z(x, y)=\int_0^1 g(\lambda, \mu; t)\,\tau[\lambda+(\mu-\lambda)t]\,dt+\int_0^1 h(\lambda, \mu; t)\,\nu[\lambda+(\mu-\lambda)t]\,dt, \tag{4}$$

where the nuclei

$$g(\lambda, \mu; t) \text{ and } h(\lambda, \mu; t)$$

satisfy the conditions

$$g(\lambda, \mu; t) = \frac{O(1)}{t^{5/6}\,(1-t)^{5/6}}, \quad h(\lambda, \mu; t) = \frac{O(1)\,(\mu-\lambda)^{2/3}}{t^{1/6}\,(1-t)^{1/6}} \tag{5}$$

and τ and ν are given by the formulae (2a). The formula (4) is true for negative values of y of small absolute magnitude.

As consequence of formula (4) we see, that Cauchy's problem in our case is put correctly in the sense of Hadamard (of course, only in the region lying on the «hyperbolic» side of the parabolic line). In fact, a slight variation of $\tau(x)$ and $\nu(x)$ causes but a small change of the solution $z(x, y)$.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 8 (1944), 225—232 Série mathématique

А. А. МАРКОВ

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СВЯЗНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

Работа содержит общий метод построения коммутативных связных топологических групп, все элементы которых имеют второй порядок.

1. В нашей работе «О свободных топологических группах» * приведен пример периодической группы произвольной мощности, не допускающей связной топологизации [С. Т. Г., § 9]. Рассматриваемая в этом примере группа представляется как сумма двух не пересекающихся непустых множеств, оказывающихся замкнутыми при любой топологизации группы, откуда и следует отсутствие связной топологизации.

В связи с этим примером возникает, однако, вопрос: может ли периодическая группа вообще допускать связную топологизацию, иначе говоря, существуют ли периодические связные топологические группы? В настоящей статье дается утвердительный ответ на этот вопрос.

2. Пусть X — произвольное множество. Совокупность его конечных подмножеств образует группу, если принять за операцию умножения сложение mod 2, иначе говоря, если положить

$$zt = (z \cup t) \setminus (z \cap t)$$

для любых двух конечных подмножеств z и t множества X. Мы будем обозначать эту группу буквой G.

Очевидно, что G представляет собою такую абелеву группу, что квадрат любого ее элемента равен единичному элементу. Роль единичного элемента играет пустое множество.

3. Подмножества множества X, содержащие не более двух элементов, мы будем называть *простейшими множествами*.

---

* Печатается в «Изв. Ак. Наук СССР, сер. мат.». В дальнейшем мы будем эту работу именовать С. Т. Г.

Очевидно, что каждый элемент группы G может быть представлен как произведение конечной системы простейших множеств.

Пусть m—целое неотрицательное число, $\{z_i\}_{i=1}^m$ — система простейших множеств. Будем говорить, что система $\{z_i\}_{i=1}^m$ каноническая, если $z_i \neq \Lambda$ $(i=1, \ldots, m)$ и $z_i \cap z_j = \Lambda$ $(i \neq j;\ i, j=1, \ldots, m)$.

Очевидно, что каждый элемент группы G может быть представлен как произведение канонической системы простейших множеств. Принимая, далее, во внимание, что произведение любой конечной системы попарно не пересекающихся элементов группы G сводится к их теоретико-множественному суммированию, убеждаемся в справедливости следующей леммы.

ЛЕММА 1. *Каков бы ни был элемент z группы G, существует лишь конечное число канонических систем $\{z_i\}_{i=1}^m$ простейших множеств, таких, что*

$$z = \prod_{i=1}^{m} z_i. \tag{1}$$

4. Пусть f — вещественная функция в множестве X. Определим в совокупности простейших множеств функцию π_f следующим образом:

$$\pi_f z = \begin{cases} 0 \text{ при } z = \Lambda; \\ |fx| \text{ при } z = (x), \text{ где } x \in X; \\ |fx \cdot fy| \text{ при } z = (x, y), \text{ где } x \in X,\ y \in X,\ x \neq y. \end{cases} \tag{2}$$

Определенную таким образом функцию π_f будем называть f-ценой. Ее значение $\pi_f z$ для аргумента z будем называть f-ценой множества z. f-цена есть вещественная неотрицательная функция, определенная в совокупности простейших множеств.

ЛЕММА 2. *Если z и t—такие простейшие множества, что $z \cap t \neq \Lambda$, то zt есть простейшее множество и $\pi_f(zt) \leqslant \pi_f z + \pi_f t$.*

Это следует из определения простейшего множества, равенства (2) и неравенств

$$|\xi - \zeta| \leqslant |\xi - \eta| + |\eta - \zeta|, \quad |\eta| \leqslant |\xi| + |\xi - \eta|,$$

справедливых при любых вещественных ξ, η и ζ.

Из леммы 2 следует

ЛЕММА 3. *Если система $\{z_i\}_{i=1}^m$ простейших множеств не каноническая, то существует такая система $\{t_j\}_{j=1}^n$ простейших множеств, что при $n < m$*

$$\prod_{j=1}^{n} t_j = \prod_{i=1}^{m} z_i, \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_f t_j \leqslant \sum_{i=1}^{m} \pi_f z_i. \quad (4)$$

Из леммы 3 следует

ЛЕММА 4. *Какова бы ни была система* $\{z_i\}_{i=1}^m$ *простейших множеств, существует каноническая система* $\{t_j\}_{j=1}^n$ *простейших множеств, такая, что имеют место соотношения* (3) и (4).

5. Пусть $z \in G$. Согласно лемме 1, имеется лишь конечное число канонических систем $\{z_i\}_{i=1}^m$ простейших множеств, удовлетворяющих условию (1). Каждой такой системе соответствует число

$$\sum_{i=1}^{m} \pi_f z_i. \quad (5)$$

Среди так получаемых чисел имеется наименьшее. Его мы будем называть f-**нормой** элемента z и обозначать символом $N_f z$.

Из леммы 4 вытекает

ЛЕММА 5. *f-норма элемента z группы G есть наименьшее значение выражения* (5), *когда система* $\{z_i\}_{i=1}^m$ *пробегает совокупность конечных систем простейших множеств, удовлетворяющих условию* (1).

ЛЕММА 6. *Если* $z = (x)(y)$, *где* $x \in X$, $y \in X$, *то* $N_f z = |fx - fy|$.

Доказательство. Если $x \neq y$, то $z = (x, y)$ и существуют лишь три канонические системы $\{z_i\}_{i=1}^m$, удовлетворяющие условию (1), а именно системы $\{(x), (y)\}$, $\{(y), (x)\}$ и $\{(x, y)\}$. Для первых двух величина (5) равна $|fx| + |fy|$, а для последней она равна $|fx - fy|$. Так как $|fx - fy| \leqslant |fx| + |fy|$, то в этом случае $N_f z = |fx - fy|$.

Если $x = y$, то $z = \Lambda$ и единственной канонической системой $\{z_i\}_{i=1}^m$, удовлетворяющей условию (1), является пустая система Λ, для которой величина (5) равна нулю. Поэтому $N_f z = 0$, а так как и $|fx - fy| = 0$, то и в этом случае $N_f z = |fx - fy|$.

ЛЕММА 7. *Если* $z = (x_i)_{i=1}^h$, где h — *натуральное число, и* $fx_i = i$ $(i = 1, \ldots, h)$, *то* $N_f z \geqslant 1$.

Доказательство. В самом деле, в этом случае f-цена любого содержащегося в z непустого простейшего множества, очевидно $\geqslant 1$. Так как все f-цены неотрицательны и $h \geqslant 1$, значения выражения (5) для канонических систем $\{z_i\}_{i=1}^m$, удовлетворяющих условию (1), также $\geqslant 1$, откуда следует, что $N_f z \geqslant 1$.

6. Условимся теперь понимать символ N_f как знак, определенный в G вещественной функции. Значение этой функции для аргумента z есть f-норма z.

ЛЕММА 8. *Функция* N_f *есть норма* **в* G.

Доказательство. Мы уже видели, что $N_f 1_G = N_f \Lambda = 0$ **. Следовательно, N_f удовлетворяет условию N [С. Т. Г., определение 4].

* Понятие нормы в группе определено в С. Т. Г., § 1.

** См. доказательство леммы 6.

Пусть $z \in G$ и $t \in G$. Существуют канонические системы $\{z_i\}_{i=1}^m$ и $\{t_j\}_{j=1}^n$ такие, что

$$z = \prod_{i=1}^{m} z_i, \quad t = \prod_{j=1}^{n} t_j; \tag{6}$$

$$N_f z = \sum_{i=1}^{m} \pi_f z_i, \quad N_f t = \sum_{j=1}^{n} \pi_f t_j. \tag{7}$$

Положим $z_i = t_{i-m}$ $(i = m+1, \ldots, n)$. Согласно (6)

$$zt = \prod_{i=1}^{m+n} z_i,$$

и так как $\{z_i\}_{i=1}^{m+n}$ есть система простейших множеств, то, согласно лемме 5 и равенствам (7),

$$N_f(zt) \leqslant \sum_{i=1}^{m+n} \pi_f z_i = \sum_{i=1}^{m} \pi_f z_i + \sum_{j=1}^{n} \pi_f t_j = N_f z + N_f t.$$

Принимая во внимание, что в группе G все квадраты равны 1_G, получаем из последнего соотношения $N_f(zt^{-1}) \leqslant N_f z + N_f t$. Таким образом, N_f удовлетворяет условию N_2 [С. Т. Г., определение 4], что и требовалось доказать.

7. Пусть X—вполне регулярное пространство и N—какая-либо норма в G. При $x \in X$, $y \in X$ имеем $(x)\,(y) \in G$. В силу этого $N((x)\,(y))$ можно рассматривать как некоторую функцию пары $\{x, y\}$ точек пространства X. Будем говорить, что норма N согласована с X, если $N((x)\,(y))$ является непрерывной функцией пары $\{x, y\}$ точек пространства X.

ЛЕММА 9. *Если f непрерывная функция в пространстве X, то f-норма согласована с X.*

Это следует из леммы 6.

ЛЕММА 10. *Совокупность норм в G, согласованных с X, есть мультинорма* в G.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{N}$ означает интересующую нас совокупность норм в G, согласованных с X. $\mathfrak{N}$, очевидно, удовлетворяет условиям M_1 и M_2 [С. Т. Г., определение 13]. Докажем, что $\mathfrak{N}$ удовлетворяет и условию M_3.

* Определение мультинормы дано в С. Т. Г., § 3.

Пусть $z \in G \setminus (1_G)$. Тогда z—непустое конечное подмножество пространства X. Пусть $z = (z_i)_{i=1}^h$, где h—натуральное число, $z_i \in X$ и $z_i \neq z_j$ при $i \neq j$. Существует в пространстве X такая непрерывная функция f, что $fz_i = i$ $(i = 1, \ldots, h)$ [С. Т. Г., § 4, лемма 48]. Согласно лемме 9, норма N_f в группе G согласована с X, т. е. $N_f \in \mathfrak{N}$. Согласно лемме 7, $N_f z \geqslant 1$. Таким образом, $\mathfrak{N}$ удовлетворяет условию M_3, что и требовалось доказать.

Мультинорма $\mathfrak{N}$ определяет в группе G топологию. Множества

$$U_N = \mathop{\mathscr{E}}_{z} (Nz < 1) \quad (N \in \mathfrak{N})$$

образуют в этой топологии полную систему окрестностей единичного элемента [С. Т. Г., § 3, теорема 6]. В дальнейшем мы будем рассматривать G как топологическую группу.

8. Каждой точке x пространства X соответствует точка (x) топологической группы G. Определим отображение φ пространства X в топологическую группу G равенством

$$\varphi x = (x) \quad (x \in X). \tag{8}$$

ЛЕММА 11. *φ есть непрерывное отображение пространства X в топологическую группу G.*

Доказательство. Пусть $v \in X$ и U—окрестность точки φv в G. Множество $U\varphi v$ является тогда окрестностью 1_G в G. Поэтому существует норма $N \in \mathfrak{N}$ такая, что $U_N \subset U\varphi v$. Эта норма согласована с X, в силу чего функция $N((v)(y))$ точки $y \in X$ непрерывна в X. Принимая во внимание, что $N((v)(v)) = N1_G = 0$ заключаем, что множество

$$V = \mathop{\mathscr{E}}_{y} (N((v)(y)) < 1)$$

является окрестностью точки v в пространстве X. При $y \in V$ имеем $N((v)(y)) < 1$, откуда $(v)(y) \in U_N \subset U\varphi v$, и, согласно (8), получаем $\varphi y \in U$. Следовательно, $\varphi V \subset U$. Этим доказана непрерывность отображения φ в точке v. Так как эта точка произвольна, то φ есть непрерывное отображение пространства X в топологическую группу G, что и требовалось доказать*.

Из леммы 11 вытекает

ЛЕММА 12. *Если пространство X связно, то φX есть связное подмножество топологической группы G.*

9. Пусть H означает совокупность конечных подмножеств пространства X, содержащих четное число элементов. H есть подгруппа индекса 2 топологической группы G.

---

* φ является даже топологическим отображением пространства X на множество φX. Мы не приводим доказательства этого предложения, так как не пользуемся им.

ЛЕММА 13. *Пусть* $z \in H \setminus (1_H)$. *Если пространство* X *связно, то существуют* t *и* y, *удовлетворяющие условиям:*

1° $z \in Y$,

2° $t \in Y$,

3° $Y \in H$,

4° Y *связно,*

5° t *содержит меньше элементов, чем* z.

Доказательство. Так как $z \in H \setminus (1_H)$, z непусто и содержит четное число элементов. Поэтому существуют x и y такие, что $x \in z$ $y \in z$ и $x \neq y$. Положим

$$t = z \setminus (x,\ y), \quad Y = t\varphi x \varphi X.$$

Имеем

$$y \in z \subset X, \quad \varphi y \in \varphi X, \quad (x)\ (y) = \varphi x \varphi y \in \varphi x \varphi X,$$

$$z = t\ (x)\,(y) \in t\varphi x \varphi X = Y.$$

Таким образом, условие 1° удовлетворено.

Далее,

$$x \in z \subset X, \quad \varphi x \in \varphi X, \quad 1_G = (\varphi x)^2 \in \varphi x \varphi X,$$

$$t \subset t\varphi x \varphi X = Y.$$

Условие 2° удовлетворено.

Так как $\varphi x \in \varphi X$ и каждый элемент множества φX содержит ровно одну точку пространства X, каждый элемент множества $\varphi x \varphi X$ либо содержит ровно две точки этого пространства, либо пуст. Поэтому $\varphi x \varphi X \subset H$. Так как $z \in H$, то и $t = z\,(x)\ (y) \in H$. Отсюда $Y = t\varphi x \varphi X \subset H$, т. е. выполнено условие 3°.

Связность множества Y следует из леммы 12, так как множество $Y = t\varphi x \varphi X$ гомеоморфно множеству φX.

Условие 5° очевидно выполнено.

Из леммы 13 вытекает

ЛЕММА 14. *Если пространство* X *связно, то, какова бы ни была точка* z *топологической группы* H, *существует связное подмножество этой топологической группы, содержащее точку* z *и точку* 1_H.

Из леммы 14 следует

ЛЕММА 15. *Если пространство* X *связно, то, каковы бы ни были точки* z *и* t *топологической группы* H, *существует связное подмножество этой топологической группы, содержащее эти точки.*

Из леммы 15 следует

ЛЕММА 16. *Если пространство X связно, то и топологическая группа H связна.*

10. Мощность топологической группы G равна мощности пространства X, если последняя бесконечна*. В этом случае мощность топологической группы H также равна мощности пространства X. Принимая во внимание, что существуют связные вполне регулярные (и даже метризуемые) пространства любой мощности $\geqslant 2^{\aleph_0}$ **, приходим к следующему результату.

Какова бы ни была мощность $\mathfrak{m} \geqslant 2^{\aleph_0}$, существует связная топологическая группа мощности $\mathfrak{m}$, такая, что квадрат любого элемента этой топологической группы равен ее единичному элементу.

Поступило
9. XII. 1943

---

* Это следует из известного равенства $\mathfrak{m} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}^i$, справедливого для любой бесконечной мощности $\mathfrak{m}$.

** Связное метрическое пространство заданной мощности $\mathfrak{m} \geqslant 2^{\aleph_0}$ может быть построено, например, так.

Пусть A—произвольное множество мощности $\mathfrak{m}$ и B—совокупность пар $\{x, \xi\}$, где $x \in A$, а ξ—положительное число. Пусть a—произвольный объект, не принадлежащий B. Положим $X = B \cup (a)$ и определим в множестве X метрику ρ следующим образом:

$$\rho(\{x, \xi\}, \{y, \eta\}) = \xi + y \text{ при } x = y,$$
$$\rho(\{x, \xi\}, \{x, y\}) = |\xi - \eta|,$$
$$\rho(a, \{x, \xi\}) = \rho(\{x, \xi\}, a) = \xi,$$
$$\rho(a, a) = 0.$$

Здесь x и y—произвольные элементы множества A, ξ, η—произвольные положительные числа.

A. MARKOFF. ON THE EXISTENCE OF PERIODIC CONNECTED TOPOLOGICAL GROUPS

The paper contains a general method for constructing of commutative connected topological groups, all elements of which are of order 2. The point of departure of the construction is an arbitrary connected completely regular topological space X, and the group constructed contains a subset homeomorphic to X.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 8 (1944), 233—242 Série mathématique

Н. А. ШАНИН

О ПОГРУЖЕНИЯХ В СТЕПЕНЬ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

(*Представлено академиком* Н. А. Колмогоровым)

Устанавливаются некоторые необходимые и достаточные условия возможности топологического погружения одного топологического пространства в некоторую степень другого топологического пространства, и выясняется механизм таких погружений

§ 1. Обозначения и терминология

Пусть Ξ — фиксированное множество индексов и X — абстрактная функция, сопоставляющая каждому $\xi \in \Xi$ некоторое топологическое пространство [сокращенно: T-пространство*] X_ξ. Топологическое произведение системы T-пространств $\{X_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ [т. е. множество абстрактных функций x, определенных на Ξ и таких, что $x_\xi \in X_\xi$ при каждом $\xi \in \Xi$, при условии, что топология в этом множестве введена по способу А. Н. Тихонова (1)] будем обозначать, следуя Э. Шпильрайну (2), через X^Ξ. Если все T-пространства X_ξ совпадают: $X_\xi = R$ при всех $\xi \in \Xi$, то топологическое произведение будем обозначать также через R^Ξ (степень T-пространства R).

Известен ряд построений [работы А. Н. Тихонова (1), E. Čech'a (3) П. С. Александрова (4)], осуществляющих топологическое погружение пространств определенных типов в степени некоторых конкретных пространств. В настоящей заметке выясняется механизм таких погружений. Условимся сначала о некоторых терминах и обозначениях.

1° Операцию проектирования произведения X^Ξ в составляющую X_ξ будем обозначать через π_ξ.

2° Пусть $\xi \in \Xi$ и $A \subset X_\xi$. Через $C_\xi(A)$ будем обозначать множество всех элементов $x \in X^\Xi$ таких, что $x_\xi \in A$. Иными словами, $C_\xi(A) =$

---

* Предполагаем выполненными, вообще говоря, лишь следующие аксиомы: сумма любого числа и пересечение конечного числа открытых множеств суть открытые множества, всё пространство и пустое множество—открытые множества.

$=\pi_\xi^{-1}(A)$. Множества этого типа, следуя Э. Шпильрайну (²), назовем **цилиндрическими**.

3° Если f—отображение множества S в произведение X^Ξ, то суперпозиция $\pi_\xi f$ отображений f и π_ξ будет отображением множества S в X_ξ. Отображения $\pi_\xi f$ называются **составляющими** отображения f. С другой стороны, если абстрактная функция φ ставит в соответствие каждому $\xi \in \Xi$ некоторое отображение φ_ξ множества S в X_ξ, то существует единственное отображение f множества S в произведение X^Ξ, обладающее свойством: $\pi_\xi f = \varphi_\xi$ при каждом $\xi \in \Xi$. Это отображение f назовем **генератором системы отображений** $\{\varphi_\xi\}_{\xi \in \Xi}$.

4° Пусть все T-пространства X_ξ совпадают: $X_\xi = R$ при всех $\xi \in \Xi$. Пусть абстрактная функция φ, заданная на множестве Ξ, определяет систему $\{\varphi_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ отображений множества S и R. Отображения φ_ξ могут оказаться одинаковыми при разных ξ. Совокупность* различных отображений множества S в R из числа отображений φ_ξ образует **совокупность элементов системы** $\{\varphi_\xi\}_{\xi \in \Xi}$.

5° Семейство* всех открытых подмножеств T-пространства S обозначаем через $\mathfrak{G}_S$. Семейство $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}_S$ назовем **открытым псевдобазисом** T-пространства S, если всевозможные конечные пересечения элементов $\mathfrak{A}$ образуют открытый базис S. В частности, семейство цилиндрических множеств $C_\xi(G)$; где ξ пробегает всё Ξ, а при фиксированном ξ G пробегает семейство всех открытых множеств T-пространства X_ξ (или даже какой-либо открытый псевдобазис X_ξ), образует открытый псевдобазис произведения X^Ξ.

§ 2. Основная теорема

Пусть f—отображение множества S в множество R. Говорим, что f различает точки z_1 и z_2 множества S, если $f(z_1) \neq f(z_2)$. Пусть Φ—некоторая совокупность отображений S в R. Будем говорить, что Φ **различает точки множества** S, если для любых двух различных точек множества S существует $f \in \Phi$, различающее эти точки. Если Φ состоит из одного отображения f, то говорим просто, что f различает точки множества S. Очевидно, что f тогда и только тогда различает точки множества S, когда f есть взаимно однозначное отображение S в R [т. е. взаимно однозначное отображение S на $f(S)$].

Определение 1. Говорим, что T-пространство S **точечно отделено** в T-пространстве R, если совокупность всех непрерывных отображений S в R различает точки S.

---

* Термины «множество», «совокупность» и «семейство» равнозначны. Однако из стилистических соображений мы предпочтем термин «совокупность» для обозначения множества, элементами которого являются отображения множеств, а термин «семейство»—для обозначения множества, элементы которого сами суть множества

Пусть S и R — два T-пространства и f — отображение S в R. Пусть $G \in \mathfrak{G}_S$. Говорим, что f реализует множество G, если существует такое $H \in \mathfrak{G}_R$, что G есть полный f-прообраз множества H, т. е. $G = f^{-1}(H)$. Пусть Φ — некоторая совокупность отображений S в R и $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{G}_S$. Будем говорить, что Φ **реализует семейство** $\mathfrak{A}$, если для любого $G \in \mathfrak{A}$, существует $f \in \Phi$, реализующее множество G. Будем говорить, что Φ реализует открытый псевдобазис в S (или открытый базис в S), если существует в S открытый псевдобазис (соответственно, открытый базис), реализуемый совокупностью Φ. Если Φ состоит из одного отображения f, то говорим просто, что f реализует семейство $\mathfrak{A}$ или открытый псевдобазис в S; или открытый базис в S. Для дальнейшего важно отметить, что *если одно отображение f реализует открытый псевдобазис в S, то оно реализует и открытый базис в S*, так как полный прообраз пересечения множеств равен пересечению полных прообразов пересекаемых множеств.

Определение 2. Будем говорить, что T-пространство S **топологически подчинено** T-пространству R, если совокупность всех непрерывных отображений S в R реализует открытый псевдобазис в S.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть S и R — два T-пространства.*

1° Для того, чтобы S можно было топологически погрузить в некоторую степень пространства R, необходимо и достаточно, чтобы S было точечно отделено в R и топологически подчинено R.

2° Для того, чтобы S можно было топологически погрузить в R^{Ξ}, необходимо и достаточно, чтобы существовала совокупность Φ непрерывных отображений S в R, мощность которой не превосходит мощность множества Ξ, различающая точки S и реализующая открытый псевдобазис в S.

3° В конструктивном отношении всякое топологическое погружение S в степень пространства R характеризуется следующим образом. Если f — топологическое отображение S в степень R^{Ξ}, то отображения $\varphi_\xi = \pi_\xi f$ пространства S в R непрерывны и совокупность элементов системы $\{\varphi\}_{\xi\in\Xi}$ различает точки S и реализует открытый псевдобазис в S.

Обратно, если $\{\varphi_\xi\}_{\xi\in\Xi}$ — произвольная система непрерывных отображений S в R, совокупность элементов которой различает точки S и реализует открытый псевдобазис S, то генератор f этой системы отображений есть топологическое отображение S в R^{Ξ}.

Первая и вторая части этой теоремы непосредственно следуют из третьей, которая в свою очередь вытекает из следующих трех лемм.

ЛЕММА 1. *Если f взаимно однозначное отображение S в степень R^{Ξ}, то отображения $\varphi_\xi = \pi_\xi f$ множества S в R образуют систему $\{\varphi_\xi\}_{\xi\in\Xi}$, совокупность элементов которой различает точки S.*

Обратно, если $\{\varphi_\xi\}_{\xi\in\Xi}$ — произвольная система отображений S в R, совокупность элементов которой различает точки S, то генератор f этой системы отображений есть взаимно однозначное отображение S в R^{Ξ}.

ЛЕММА 2. *Если f непрерывное отображение S в R^{Ξ}, реализующее открытый базис в S, то отображения $\varphi_\xi = \pi_\xi f$ пространства S в R непрерывны и совокупность элементов системы $\{\varphi_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ реализует открытый псевдобазис в S.*

Обратно, если $\{\varphi_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ — произвольная система непрерывных отображений S в R, совокупность элементов которой реализует открытый псевдобазис в S, то генератор f этой системы отображений есть непрерывное отображение S в R^{Ξ}, реализующее открытый базис в S.

Доказательство. Введем обозначение $E = R^{\Xi}$. Пусть f — непрерывное отображение S в E, реализующее открытый базис в S и $z \in G \in \mathfrak{G}_S$. Тогда существует такое $H \in \mathfrak{G}_E$, что $z \in f^{-1}(H) \subset G$. Следовательно, $f(z) \in H$. Так как цилиндрические множества вида $C_\xi(B)$, где $B \in \mathfrak{G}_R$, образуют открытый псевдобазис E, то существуют конечная система индексов $\{\xi_k\}_{k=1}^n$, и система $\{B_k\}_{k=1}^n$ открытых в R множеств такие, что*

$$f(z) \in \bigcap_{k=1}^{n} C_{\xi_k}(B_k) \subset H.$$

Тогда

$$z \in \bigcap_{k=1}^{n} f^{-1}(C_{\xi_k}(B_k)) = \bigcap_{k=1}^{n} (\pi_{\xi_k} f)^{-1}(B_k) = \bigcap_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k}^{-1}(B_k) \subset f^{-1}(H) \subset G.$$

Следовательно,

$$z \in \bigcap_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k}^{-1}(B_k) \subset G.$$

Известно, что отображение T-пространства в произведение системы T-пространств непрерывно тогда и только тогда, когда все составляющие этого отображения непрерывны. Поэтому все φ_ξ непрерывны, множества $\varphi_{\xi_k}^{-1}(B_k)$ открыты в S и совокупность элементов системы $\{\varphi_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ реализует открытый псевдобазис в S.

Обратно, пусть все φ_ξ суть непрерывные отображения S в R и совокупность элементов системы $\{\varphi_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ реализует открытый псевдобазис в S. Пусть $z \in G \in \mathfrak{G}_S$. Тогда существуют конечная система индексов $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ и система $\{B_k\}_{k=1}^n$ открытых в R множеств такие, что

$$z \in \bigcap_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k}^{-1}(B_k) \subset G.$$

Но

$$\varphi_\xi^{-1}(B) = f^{-1}(C_\xi(B)).$$

* Знак $\bigcap$ обозначает пересечение множеств.

Поэтому

$$z \in \bigcap_{k=1}^{n} f^{-1}(C_{\xi_k}(B_k)) \subset G.$$

Таким образом, f представляют собою непрерывное отображение S в R^{Ξ}, реализующее открытый псевдобазис в S, а следовательно, и открытый базис в S.

ЛЕММА 3. *Для того, чтобы отображение f T-пространства S в некоторое T-пространство E было топологическим отображением в E, необходимо и достаточно выполнение условий:*

1° f есть взаимно однозначное отображение S в E;

2° f непрерывно,

3° f реализует открытый базис в S.

§ 3. Погружения T_0-пространств

Особенность случая, когда погружаемое пространство S является T_0-пространством [см. ([5])] выясняет следующая

ЛЕММА 4. *Если некоторая совокупность Φ непрерывных отображений T_0-пространства S в T-пространство R реализует открытый псевдобазис в S, то Φ различает точки S. Если T_0-пространство S топологически подчинено R, то оно точечно отделено в R.*

Из леммы непосредственно вытекает

ТЕОРЕМА 2. 1° *Для того, чтобы T_0-пространство S можно было топологически погрузить в некоторую степень T-пространства R, необходимо и достаточно, чтобы S было топологически подчинено R.*

2° *Для того, чтобы T_0-пространство S можно было топологически погрузить в степень R^{Ξ}, необходимо и достаточно, чтобы существовала совокупность Φ непрерывных отображений S в R, мощность которой не превосходит мощность множества Ξ, реализующая открытый псевдобазис в S.*

3° *Если $\{\varphi_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ — произвольная система непрерывных отображений T_0-пространства S в R, совокупность элементов которой реализует открытый псевдобазис в S, то генератор f этой системы отображений есть топологичеекое отображение S в R^{Ξ}.*

ТЕОРЕМА 3. *Если S есть T_0-пространство, топологически подчиненное T-пространству R, а Ξ — бесконечное множество, мощность которого не меньше веса пространства S, то существует топологическое отображение S в степень R^{Ξ}.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H}$ — открытый псевдобазис S, реализуемый совокупностью всех непрерывных отображений S в R. Если вес S бесконечен, то из $\mathfrak{H}$ выделяем семейство $\mathfrak{K}$, имеющее мощность, равную весу S, и являющееся открытым псевдобазисом S. Если вес S конечен, то семейство $\mathfrak{H}$ конечно, и мы полагаем: $\mathfrak{K} = \mathfrak{H}$. Теперь каждому мно-

жеству $G \in \mathfrak{K}$ сопоставим некоторое непрерывное отображение S в R, реализующее это множество. Так как мощность совокупности таких отображений не больше мощности множества Ξ, то из этих отображений можно образовать систему $\{\varphi_\xi\}_{\xi \in \Xi}$, совокупность элементов которой реализует семейство $\mathfrak{K}$. Генератор f этой системы отображений есть топологическое отображение S в R^Ξ.

ТЕОРЕМА 4. *Если R есть T_0-пространство, имеющее конечный или счетный вес, а $\mathfrak{n}$ — кардинальное число $\geqslant \aleph_0$, то степень* $R^\mathfrak{n}$ есть универсальное пространство для класса T_0-пространств, топологически подчиненных R и имеющих вес $\leqslant \mathfrak{n}$, т. е. всякое пространство этого класса может быть топологически погружено в $R^\mathfrak{n}$ и всякое подпространство степени $R^\mathfrak{n}$ относится к этому классу.*

§ 4. Конкретные конструкции

1. Вполне регулярные пространства Хаусдорфа характеризуются как T_0-пространства, топологически подчиненные сегменту $I = [0; 1]$ числовой прямой (в вполне регулярных пространствах непрерывные функции реализуют не только открытый псевдобазис, но даже открытый базис). Поэтому теорема 4 в этом случае конкретизируется в классическую теорему А. Н. Тихонова ([1]): *пространство $I^\mathfrak{n}$ является универсальным для класса вполне регулярных пространств Хаусдорфа, вес которых $\leqslant \mathfrak{n}$.*

Обозначим через Φ совокупность всех непрерывных функций во вполне регулярном пространстве Хаусдорфа S, значения которых лежат в сегменте I. Эта совокупность образует систему отображений, генератор которой f есть топологическое отображение S в степень** I^Φ.

Эту конструкцию рассматривал E. Čech ([3]).

2. Обозначим через F двухточечное T_0-пространство $\{0; 1\}$, в котором открытыми подмножествами считаются: всё F, пустое множество и одноточечное множество $\{0\}$. Очевидно, что всякое T_0-пространство топологически подчинено пространству F. Поэтому теорема 4 конкретизируется в этом случае в теорему П. С. Александрова ([4]): пространство $F^\mathfrak{n}$ является универсальным для класса T_0-пространств, вес которых $\leqslant \mathfrak{n}$.

3. Обозначим через D двухточечное изолированное пространство $\{0; 1\}$, в котором всякое подмножество считается открытым. Легко видеть, что T-пространство тогда и только тогда нульмерно, когда оно топологически подчинено пространству D. Поэтому:

пространство $D^\mathfrak{n}$ является универсальным для класса нульмерных T-пространств, вес которых $\leqslant \mathfrak{n}$.

* В обозначении $R^\mathfrak{n}$ кардинальное число $\mathfrak{n}$ символизирует множество индексов мощности $\mathfrak{n}$.

** Совокупность отображений Φ играет здесь одновременно роль множества индексов системы.

§ 5

ТЕОРЕМА 5. *Пусть R_1 и R_2 — два T_0-пространства. Для того, чтобы они определяли одинаковые классы топологически подчиненных им T_0-пространств (т. е. чтобы всякое T_0-пространство, топологически подчиненное одному из них, было топологически подчинено другому), необходимо и достаточно, чтобы R_1 можно было топологически погрузить в некоторую степень пространства R_2 и R_2 можно было топологически погрузить в некоторую степень пространства R_1.*

Например, двухточечное изолированное пространство, пространство целых чисел, пространство рациональных чисел и пространство иррациональных чисел определяют одинаковые классы топологически подчиненных им T_0-пространств.

Отметим еще некоторые предложения, относящиеся к понятиям, введенным определениями 1 и 2.

(1) Если S'—подпространство T-пространства S и S точечно отделено в T-пространстве R (топологически подчинено R), то и S' точечно отделено в R (топологически подчинено R).

(2) Пусть $\{S_\eta\}_{\eta \in H}$ — система T-пространств. Произведение S^H тогда и только тогда точечно отделено в T-пространстве R (топологически подчинено R), когда каждое S_η точечно отделено в R (топологически подчинено R).

(3) Если R' — подпространство T-пространства R и T-пространство S точечно отделено в R' (топологически подчинено R'), то S точечно отделено в R (топологически подчинено R).

(4) T-пространство S тогда и только тогда точечно отделено в степени R^Ξ (топологически подчинено R^Ξ), когда S точечно отделено в R (топологически подчинено R).

(5) Если S точечно отделено в R (топологически подчинено R), а R точечно отделено в Q (топологически подчинено Q), то S точечно отделено в Q) (топологически подчинено Q).

(6_1) Если S точечно отделено в R и R есть соответственно T_0-, T_1-, T_2- пространство, то и S будет соответственно T_0-, T_1-, T_2-пространством.

(6_2) Если S топологически подчинено R и R есть соответственно* слабо регулярное, регулярное, вполне регулярное T-пространство, то и S будет соответственно слабо регулярным, регулярным, вполне регулярным T-пространством.

Замечание. Несколько обобщив определение 1 и 2, можно высказать теорему, характеризующую топологические погружения в произведение любой системы T-пространств.

Поступило
11. X. 1944

---

* Применяется терминология заметки (6).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Tychonoff A., Math. Ann., 102 (1929), 544—561.
[2] Шпильрайн Э., Докл. Ак. Наук СССР, XXXI (1941), No. 6, 525—527.
[3] Čech E., Ann. of Math., 38 (1937), 823—845.
[4] Александров П. С., Докл. Ак. Наук СССР, II (XI) 1936, No. 2, 88—91.
[5] Alexandroff P. und Hopf H., Topologie, I, 1935.
[6] Шанин Н. А., Докл. Ак. Наук СССР, XXXVIII (1943), No. 4, 118—122.

N. SHANIN. ON IMBEDDING IN A POWER OF A TOPOLOGICAL SPACE

SUMMARY

We denote by $\mathfrak{G}_S$ the family of all open subsets of a T-space S. A family $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}_S$ is called an open pseudo-basis of the T-space S if all finite intersections of elements of $\mathfrak{A}$ form a basis of S.

Let f be a mapping of a set S into a set R. We say that f distinguishes the points z_1 and z_2 of S if $f(z_1) \neq f(z_2)$. Let Φ be a set of mappings of S into R. We say that Φ distinguishes the points of S if for any two distinct points of S there exists a mapping $f \in \Phi$ distinguishing them. If Φ consists of a single mapping f, we simply say that f distinguishes the points of S.

Definition 1. We say that a T-space S is pointwise separated in a T-space R if the totality of all continuous mappings of S into R distinguishes the points of S.

Let S and R be T-spaces and f a mapping of S into R. Consider a $G \in \mathfrak{G}_S$. We say that f realizes the set G, if there exists $H \in \mathfrak{G}_R$ such that $G = f^{-1}(H)$. Let Φ be a set of mappings of S into R and $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}_S$. We say that Φ realizes the family $\mathfrak{A}$, if for every $G \in \mathfrak{A}$ there exists an $f \in \Phi$, which realizes the subset G. We further say that Φ realizes an open basis (pseudo-basis) in S, if there exists an open basis (resp. pseudo-basis) of S realized by the set Φ. If Φ contists of a single f we simply say that f realizes the family $\mathfrak{A}$ or an open basis (resp. pseudo-basis) in S.

Definition 2. We say that a T-space S is topologically subjected to a T-space R if the totality of all continuous mappings of S into R realizes an open pseudo-basis is S.

THEOREM 1. *Let S and R be T-spaces.*

(a) *S can be topologically imbedded in a power of the space R if and only if S is pointwise separated in R and topologically subjected to R.*

(b) *S can be topologically imbedded in R^{Ξ} if and only if there exists a set Φ of continuous mappings of S into R, the cardinal number of which is less than or equal to that of Ξ, that distinguishes the points of S and realizes an open pseudo-basis in S.*

(c) *From the constructive viewpoint every topological imbedding of S into a power of R can be characterized as follows. If f is a topological mapping of S into a power* R^{Ξ}, *then the mappings* $\varphi_\xi = \pi_\xi f$, *where* π_ξ *is a projection into* R^{Ξ}, *of S into R are continuous and the system* $\{\varphi_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ *distinguishes the points of S and realizes an open pseudo-basis in S. Conversely, if* $\{\varphi_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ *is an arbitrary system of continuous mappings of S into R distinguishing the points of S and realizing an open pseudo-basis in S, then the generator* * *f of this system is a topological mapping of S into* R^{Ξ}.

THEOREM 2. (a) *A* T_0*-space S can be topologically imbedded in a power of a T-space R if and only if S is topologically subjected to R.*

(b) *The* T_0*-space S can be topologically subjected to power* R^{Ξ} *if and only if there exists a set* Φ *of continuous mappings of S into R, the cardinal number of which does not exceed that of* Ξ, *that realizes an open pseudo-basis in S.*

(c) *If* $\{\varphi_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ *is an arbitrary system of continuous mappings of* T_0*-space S into R realizing an open pseudo-basis in S, then the generator f of this system is a topological mapping of S into* R^{Ξ}.

THEOREM 3. *If S is a* T_0*-space topologically subjected to a T-space R and* Ξ *is an infinite set, the cardinal number of which is not less than the weight of the space S, then there exists a topological mapping of S into the power* R^{Ξ}.

THEOREM 4. *If R is a* T_0*-space of finite or denumerable weight and* $\mathfrak{n}$ *is a cardinal* $\geqslant \aleph_0$, *the* $R^{\mathfrak{n}}$ *is a universal space for the class of* T_0*-spaces of weight* $\leqslant \mathfrak{n}$ *topologically subjected to R (i. e. every space of this class can be topologically imbedded in* $R^{\mathfrak{n}}$ *and every subspace of* $R^{\mathfrak{n}}$ *belongs to this class).*

Completely regular Hausdorff spaces can be characterized as T_0-spaces topologically subjected to the segment $I = [0, 1]$ of the real axis (continuous functions in completely regular space realize not only an open pseudo-basis, but even an open basis). Hence, in this case, Theorem 4 gives the classical A. Tychonoff's theorem; the space $I^{\mathfrak{n}}$ is the universal space for the class of completely regular Hausdorff spaces of weight $\leqslant \mathfrak{n}$.

Denote by Φ the totality of all continuous functions on a completely regular Hausdorff space S with values in the segment I. This set forms a system of mappings, the generator f of which is a topological mapping of S into I^{Φ}. This construction was studied by E. Čech.

---

* If an abstract function φ correlates to every $\xi \in \Xi$ a mapping φ_ξ of the set S into X_ξ, then there exists a unique mapping f of S into the product X^{Ξ} with the property: $\pi_\xi f = \varphi_\xi$ for any $\xi \in \Xi$. This mapping f is called the **generator** of the **family of mappings** $\{\varphi_\xi\}_{\xi \in \Xi}$.

Denote by F a two-point T_0-space $\{0, 1\}$, the open sets of which are F itself, the void set and the one-point set $\{0\}$. It is evident that theorem 4 gives in this case P. Alexandroff's theorem: the space $F^{\mathfrak{n}}$ is the universal space for the class of T_0-spaces of weight $\leqslant \mathfrak{n}$.

Let D denote the isolated two-point space $\{0, 1\}$, every subset of which is open. It is easily seen that a T-space is of dimension 0 if and only if it is topologically subjected to the space D. Hence: *D is the universal space for the class of spaces of dimension* 0 *whose weight is* $\leqslant \mathfrak{n}$.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Серия математическая 8 (1944), 243—280 Série mathématique

Л. С. ПОНТРЯГИН

ЭРМИТОВЫ ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ* **

Пространство H_k, так же как гильбертово, составлено из всех последовательностей $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ комплексных чисел со сходящейся суммой квадратов модулей; скалярное произведение в нем задается, однако, формулой

$$(x, y) = -x_1\bar{y}_1 - \ldots - x_k\bar{y}_k + x_{k+1}\bar{y}_{k+1} + \ldots + \ldots$$

Работа посвящена исследованию эрмитовых операторов, действующих в линейном пространстве H_k. Устанавливается, что каждый эрмитов оператор, действующий в H_k, имеет инвариантное конечномерное подпространство размерности k.

В § 1 изучаются элементарные свойства пространства H_k, которые оказываются несколько более сложными, чем соответствующие свойства гильбертова пространства. Важную роль здесь играют подпространства, на которых квадратичная форма (x, x) не вырождается. Устанавливается, что если на подпространстве Q квадратичная форма (x, x) не вырождается, то:

(a) Q изоморфно некоторому пространству H_l, $l \leqslant k$;

(b) на ортогональном дополнении Q' к Q квадратичная форма (x, x) тоже не вырождается;

(c) ортогональное дополнение к Q' совпадает с Q и H_k распадается в прямую сумму своих подпространств Q и Q', так что возможно ортогональное проектирование на оба эти подпространства.

В § 2 рассматриваются операторы, действующие в H_k. В отличие от гильбертова пространства, симметрический оператор, действующий в H_k, может иметь комплексные собственные значения и непростые эле-

* О том, что эрмитовы операторы, действующие в пространстве с индефинитной метрикой, могут представлять некоторый интерес, я узнал от С. Л. Соболева, который встретился с подобным оператором при решении одной механической задачи.

** Основные понятия теории эрмитовых операторов в гильбертовом пространстве даны у Плеснера («Спектральная теория линейных операторов», Успехи математических наук, **IX**, 1941, 3—125).

ментарные делители. Устанавливается, что число тех и других сильно ограничено числом k.

В § 3 устанавливается нетривиальное специфическое свойство эрмитова оператора A, действующего в пространстве H_k; именно, доказывается, что оператор A имеет инвариантное подпространство I размерности k, причем для каждого вектора x из I имеет место неравенство $(x, x) \leqslant 0$. Сверх того, каждое собственное значение оператора A в I имеет неотрицательную мнимую часть. Таким образом, в отличие от случая гильбертова пространства, эрмитов оператор, действующий в пространстве H_k, всегда имеет собственные значения при $k > 0$.

§ 1. Линейное пространство H_k

Определение 1. Линейное пространство H_k составлено из всех последовательностей

$$x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots \tag{1}$$

комплексных чисел с числом членов, равным $n \geqslant k$ (конечномерный случай) или бесконечности (бесконечномерный случай), для которых ряд

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \ldots + x_k\bar{x}_k + \ldots \tag{2}$$

сходится. Сходимость и линейные операции в пространстве H_k определяются так же, как в конечномерном аффинном или, соответственно, в гильбертовом пространстве. Скалярное произведение (x, y) векторов x и y дается формулой

$$(x, y) = -x_1\bar{y}_1 - x_2\bar{y}_2 - \ldots - x_k\bar{y}_k + x_{k+1}\bar{y}_{k+1} + \ldots \tag{3}$$

Для того чтобы пространство H_k трактовать как банаховское, в нем достаточно задать норму соотношением

$$\| x \|^2 = x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \ldots + x_k x_k + \ldots \tag{4}$$

Понятия линейного многообразия и подпространства определяются как обычно.

Скалярное произведение удовлетворяет обычным условиям:

$$(\lambda x, y) = \lambda (x, y); \quad (x + x', y) = (x, y) + (x', y); \quad (x, y) = \overline{(y, x)}.$$

Векторы x и y называются ортогональными, если $(x, y) = 0$. На основе этого обычным образом определяется ортогональность подпространств.

Если P — подпространство пространства H_k, то его ортогональное дополнение P' определяется как подпространство, составленное из всех векторов, ортогональных к P. Вопреки обычному, подпространства P и P' могут в пересечении содержать векторы, отличные от нуля. В этом случае мы будем говорить, что квадратичная форма (x, x) вырождается на P, т. е. в подпространстве P имеется вектор $x \neq 0$, ортогональный ко всем векторам подпространства P. Если такого вектора не суще-

ствует, то будем говорить, что квадратичная форма (x, x) не вырождается на подпространстве P. Очевидно, что на самом пространстве H_k квадратичная форма (x, x) не вырождается.

Определение 2. Пусть H_k и H_l — два пространства, описанные определением 1, а P и Q — их подпространства. Отображение f подпространства P на подпространство Q мы будем называть изоморфным, если оно взаимно однозначно, взаимно непрерывно, сохраняет линейные операции и сохраняет скалярное произведение. P и Q будем называть изоморфными, если существует изоморфное отображение f P на Q.

Ниже будет показано, что если пространства H_k и H_l изоморфны, то числа k и l равны:

$$k = l. \tag{5}$$

Изоморфное отображение подпространства P самого на себя будем называть автоморфизмом P.

В определении 1 пространство H_k было описано координатным методом—каждый вектор x задавался своими координатами $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ Любой автоморфизм f пространства H_k дает возможность ввести в H_k новую систему координат. Если $x'_1, x'_2, \ldots, x'_k, \ldots$ — координаты вектора $f(x)$, то числа $x'_1, x'_2, \ldots, x'_k, \ldots$ можно принять за новые координаты вектора x.

(A) Обозначим через H_+ подпространство пространства H_k, составленное из всех векторов x, для которых

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0.$$

Через H_- обозначим подпространство пространства H_k, составленное из всех векторов, для которых

$$x_{k+1} = x_{k+2} = \ldots = 0.$$

Очевидно, что на подпространствах H_+ и H_- квадратичная форма (x, x) не вырождается. Очевидно также, что каждый вектор x из H_k однозначно разлагается в сумму $x = x_- + x_+$, где $x_- \in H_-$, $x_+ \in H_+$. Положим $x_- = \varphi_-(x)$, $x_+ = \varphi_+(x)$. Отображения φ_- и φ_+ линейны и непрерывны, их ядра равны соответственно H_+ и H_-.

(B) Пусть P — подпространство пространства H_k, на котором квадратичная форма (x, x) неположительна, т. е. для всякого $x \in P$, $(x, x) \leqslant 0$, тогда размерность подпространства P не превосходит числа k. Из этого непосредственно вытекает равенство (5).

Из $(x, x) \leqslant 0$ следует, что пересечение P с H_+ содержит только нуль, а следовательно, при отображении φ_- подпространство P отображается линейно, непрерывно и взаимно однозначно на некоторое подпространство из H_- Таким образом, размерность подпространства P не превосходит размерности пространства H_-.

(С) Пусть P_-—некоторое подпространство пространства H_- и P_+—некоторое подпространство пространства H_+, а P—прямая сумма подпространств P_- и P_+, $P=P_-\dotplus P_+$, тогда P изоморфно некоторому пространству $H'_{k'}$, описанному в определении 1.

Пространство $H'_{k'}$ построим так, чтобы размерность H_- равнялась размерности P_-, а размерность H'_+ равнялась размерности P_+, тогда пространства P_- и H'_- изоморфны между собой; точно так же пространства P_+ и H'_+ изоморфны между собой. Эти изоморфизмы, вместе взятые, порождают изоморфное отображение P на $H'_{k'}$.

ЛЕММА 1. *Пусть P—подпространство пространства H_k, на котором квадратичная форма (x, x) не вырождается и имеет один и тот же знак ε для всех своих векторов; тогда существует автоморфизм f пространства H_k, при котором подпространство P переходит в H_ε, $f(P)\subset H_\varepsilon$.*

Доказательство. Сведем сперва случай бесконечномерного P к случаю конечномерного P. Очевидно, что бесконечномерный случай может иметь место лишь при $\varepsilon=+$ (см. (В)).

Обозначим через Q пересечение подпространств P и H_+. Так как H_+—обычное гильбертово пространство, то H_+ можно разложить в прямую сумму ортогональных между собой подпространств Q и H'_+. Прямую сумму подпространств H_- и H'_+ обозначим через H'_k, а пересечение P и H'_k—через P'. Очевидно, что H_k распадается в прямую сумму взаимно ортогональных подпространств H'_k и Q. Из этого следует, что P также распадается в прямую сумму взаимно ортогональных подпространств P' и Q. Так как P' имеет в пересечении с H_+ только 0, то размерность его не превосходит k, т. е. конечна. Квадратичная форма (x, x) на подпространстве P' не вырождается и имеет знак $+$. Допустим теперь, что существует автоморфизм f' подпространства H'_k, при котором $f'(P')\subset H'_+$. Определим автоморфизм f всего пространства H_k, как совпадающий с f' на H'_k и как тождественный на Q. Тогда $f(P)\subset H_+$ и лемма доказана.

Нам остается доказать ее для случая, когда P имеет конечную размерность.

Допустим, что P имеет конечную размерность и обозначим через H''_+ подпространство $\varphi_+(P)$ гильбертова пространства H_+. Ортогональное дополнение подпространства H''_+ в пространстве H_+ обозначим через R, а прямую сумму пространств H_- и H''_+ через H''_k. Тогда H_k является прямой суммой взаимно ортогональных подпространств H''_k и R, причем H''_k конечномерно и содержит P. Допустим теперь, что существует автоморфизм f'' конечномерного пространства H''_k, при котором P переходит в H''_ε Автоморфизм f всего пространства H_k определим как совпадающий с f'' на H''_k и как тождественный на R. Тогда $f(P)=H_\varepsilon$, т. е. лемма доказана.

Таким образом, нам достаточно доказать ее лишь для случая, когда H_k имеет конечную размерность.

Допустим, что H_k имеет конечную размерность. В этом предположении случаи $\varepsilon = +$ и $\varepsilon = -$ вполне равноправны, и мы ограничимся рассмотрением лишь того, когда $\varepsilon = +$.

Положим $\varphi_-(P) = H'''_-$ и $\varphi_+(P) = H'''_+$. Ортогональные дополнения подпространств H'''_- и H'''_+ в пространствах H_- и H_+ обозначим через S_- и S_+. Пространство H_k распадается в прямую сумму двух взаимно ортогональных подпространств $H'''_{k'} = H'''_- \dot{+} H'''_+$ и $S = S_- \dot{+} S_+$.

Как и в двух предшествующих случаях, мы можем построить надлежащий автоморфизм сперва в подпространстве $H'''_{k'}$, а затем дополнить его тождественным автоморфизмом подпространства S. Таким образом, нам достаточно рассмотреть случай, когда

$$\varphi_-(P) = H_-, \quad \varphi_+(P) = H_+. \tag{6}$$

В пространстве P форма (x, x) является позитивно-дефинитной; если принять ее за основную метрическую, то форма $(\varphi_+(x), \varphi_+(x))$ будет позитивно-дефинитной эрмитовой формой в пространстве P.

Выберем в пространстве P нормальный ортогональный базис $e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots$ $\ldots, e^{(r)}$, в котором эрмитова форма $(\varphi_+(x), \varphi_+(x))$ имеет канонический вид. Если $i \neq j$, то мы получаем $(e^{(i)}, e^{(j)}) = 0$, $(e_+^{(i)}, e_+^{(j)}) = 0$, а отсюда следует, что и $(e_-^{(i)}, e_-^{(j)}) = 0$. Здесь $e^{(i)} = e_-^{(i)} + e_+^{(i)}$ (см. (A)). В силу условия (6) векторы $e_+^{(1)}, \ldots, e_+^{(r)}$ составляют ортогональный базис пространства H_+. В силу того же условия те векторы из $e_-^{(1)}, \ldots, e_-^{(r)}$, которые отличны от нуля, составляют ортогональный базис пространства H_-. Линейное пространство, натянутое на пару векторов $e_-^{(i)}$ и $e_+^{(i)}$, обозначим через $H^{(i)}$. Пространство H_k распадается в прямую сумму взаимно ортогональных подпространств $H^{(1)}, \ldots, H^{(r)}$. Допустим теперь, что для каждого пространства $H^{(i)}$ существует автоморфизм $f^{(i)}$, при котором $f^{(i)}(e^{(i)}) = \alpha^{(i)} e_+^{(i)}$, где $\alpha^{(i)}$ — число. Определим автоморфизм f, как совпадающий с $f^{(i)}$ на $H^{(i)}$. Мы будем иметь $f(P) \subset H_+$ — и лемма тем самым будет доказана.

Таким образом, достаточно доказать ее лишь для случая, когда размерность H_k не превосходит двух. Одномерный случай вполне тривиален, остановимся лишь на двумерном.

Итак, пусть H_1 имеет базис из векторов a и b, причем $(a, a) = -1$, $(b, b) = 1$, $(a, b) = 0$. Единичный вектор из P обозначим через q, $(q, q) = 1$. Через p обозначим ортогональный к q вектор, удовлетворяющий условию $(p, p) = -1$. Очевидно, что p и q образуют базис пространства H_1. Искомый автоморфизм f пространства H_1 определим условиями:

$$f(p) = a, \quad f(q) = b.$$

Лемма 1 полностью доказана.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть Q — некоторое подпространство пространства H_k, на котором квадратичная форма (x, x) не вырождается; тогда*

существует автоморфизм f пространства H_k, при котором Q переводится в прямую сумму подпространств P_- и P_+, где $P_- \subset H_-, P_+ \subset H_+$.

Из теоремы 1 непосредственно вытекает, что всякое подпространство Q пространства H_k с невырождающейся квадратичной формой (x, x) изоморфно некоторому пространству $H'_{k'}$ (см. определение 2).

Доказательство. Если квадратичная форма (x, x) имеет один и тот же знак для всех векторов из Q, то утверждение теоремы 1 следует из леммы 1. Откидывая этот случай, построим в подпространстве Q максимальную систему $e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(r)}$ векторов, удовлетворяющую условию

$$(e^{(i)}, e^{(j)}) = -\delta_{ij}. \tag{7}$$

Так как в подпространстве Q имеются векторы x, для которых $(x, x) < 0$, то один вектор $e^{(1)}$, удовлетворяющий условию (7), всегда найдется. Если среди векторов $x \in Q$, ортогональных к $e^{(1)}$, вновь существуют такие, что $(x, x) < 0$, то найдется и второй вектор $e^{(2)}$. В силу предложения (B) процесс этот не может продолжаться неограниченно и потому максимальная система векторов, удовлетворяющих условию (7), существует.

Линейную оболочку максимальной системы $e^{(1)}, \ldots, e^{(r)}$ обозначим через Q_-. Квадратичная форма (x, x) на подпространстве Q_- не вырождается и имеет знак $-$; таким образом, в силу леммы 1 существует автоморфизм f', удовлетворяющий условию $f'(Q_-) = P_- \subset H_-$.

Положим $f'(Q) = Q'$. Пересечение Q' и H_+ обозначим через P'_+. Ортогональные дополнения подпространств P_- и P'_+ в пространствах H_- и H_+ обозначим через H'_- и H'_+. Теперь пространство H_k разложено в прямую сумму двух взаимно ортогональных подпространств $(P_- \dotplus P'_+) = P'$ и $(H'_- \dotplus H'_+) = H'$. Первое слагаемое P' входит в Q', а потому Q' разлагается в прямую сумму пространства P' и пересечения R пространств Q'' и H'. Легко видеть, что на подпространстве R квадратичная форма (x, x) не вырождается и имеет знак $+$. Таким образом, в силу леммы 1 существует автоморфизм f'' пространства H', при котором R переходит в H'_+. Определим автоморфизм f''', как совпадающий с f'' на H' и как тождественный на P'. Автоморфизм $f''' f' = f$ будет искомым — и теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть Q — подпространство пространства H_k, на котором квадратичная форма (x, x) не вырождается, и Q' — ортогональное дополнение Q в H_k; тогда на Q' квадратичная форма (x, x) также не вырождается и H_k распадается в прямую сумму подпространств Q и Q'.*

В частности, это означает, что возможно ортогональное проектирование из пространства H_k в подпространство Q. Сверх того, Q есть ортогональное дополнение Q'.

Доказательство. В силу теоремы 1 существует автоморфизм f пространства H_k, при котором $f(Q) = P = P_- \dotplus P_+$, причем

$P_- \subset H_-$, $P_+ \subset H_+$. Ортогональные дополнения подпространств P_- и P_+ в подпространствах H_- и H_+ обозначим через P'_- и P'_+. Тогда пространство H_k распадается в прямую сумму взаимно ортогональных подпространств P и $P' = P'_- \dot{+} P'_+$. Очевидно, что на P' квадратичная форма (x, x) не вырождается. Автоморфизм f^{-1} переводит подпространство P в Q, а подпространство P' — в некоторое Q' и $H_k = Q \dot{+} Q'$. Теорема доказана.

§ 2. Линейные операторы в пространстве H_k

Так как линейное пространство H_k является банаховским, то нет надобности для него определять понятия линейного функционала и линейного оператора; нужно только заново просмотреть те факты теории операторов в гильбертовом пространстве, которые связаны с понятием скалярного произведения. Здесь обнаруживаются некоторые существенные отличия, составляющие основной интерес.

Тождественный оператор будем обозначать через E, $Ex = x$. Область определения Ω линейного оператора A будем всегда считать всюду плотной в H_k.

Линейный оператор A будем называть симметрическим, если для всяких двух векторов x и y из его области определения

$$(Ax, y) = (x, Ay). \tag{1}$$

В отличие от обычной теории, симметрический оператор в H_k может иметь комплексные собственные значения, а также непростые элементарные делители. Число тех и других связано сильными ограничениями с числом k благодаря соотношению (B) § 1.

Говорят, что вектор x принадлежит собственному значению λ оператора A, если существует натуральное число r, при котором

$$(A - \lambda E)^r x = 0. \tag{2}$$

Множество всех векторов, принадлежащих собственному значению λ оператора A, составляет линейное многообразие в H_k, и называется собственным многообразием числа λ для оператора A.

(A) Пусть $\lambda \neq \bar{\mu}$; тогда векторы x и y, принадлежащие собственным значениям λ и μ симметрического оператора A, ортогональны между собой, или, что то же самое, собственные многообразия S_λ и S_μ ортогональны между собой. В частности, когда $\lambda = \mu$, причем λ комплексное, собственное многообразие S_λ ортогонально самому себе, т. е. квадратичная форма (x, x) обращается на нем тождественно в нуль и, следовательно, размерность S_λ не превосходит k (§ 1, (B)).

По предположению

$$(A - \lambda E)^r x = 0, \quad (A - \mu E)^s y = 0. \tag{3}$$

Требуется доказать, что $(x, y) = 0$.

Будем доказывать это предложение индуктивно по числу $r+s$; считая, что $r \geqslant 0$; $s \geqslant 0$. Для $r+s=0$ оно очевидно. Положим

$$(A-\lambda E)x = x'; \tag{4}$$
$$(A-\mu E)y = y'. \tag{5}$$

Тогда в силу (3)

$$(A-\lambda E)^{r-1}x' = 0, \quad (A-\mu E)^{s}y = 0; \tag{6}$$
$$(A-\lambda E)^{r}x = 0, \quad (A-\mu E)^{s-1}y' = 0. \tag{7}$$

В силу предположения индукции из (6) следует $(x'; y)=0$, а из (7) вытекает $(x, y')=0$. Умножая соотношение (4) справа скалярно на y, а соотношение (5) слева скалярно на x, получаем

$$((A-\lambda E)x, y) = (x', y) = 0; \tag{8}$$
$$(x, (A-\mu E)y) = (x, y') = 0. \tag{9}$$

Вычитая (9) из (8) и принимая во внимание симметрию A, получаем

$$(\lambda - \bar{\mu})(x, y) = 0, \quad \text{т. е.} \quad (x, y) = 0.$$

Предложение (A) показывает, что собственное многообразие комплексного собственного значения λ является конечномерным пространством. Этого нельзя утверждать относительно действительного собственного значения α, однако оказывается, что непростые элементарные делители сосредоточены в конечномерном подпространстве многообразия S_α, а число их и порядки ограничены в зависимости от числа k.

(B)* Пусть S_α — собственное многообразие действительного собственного значения α замкнутого симметрического оператора A в пространстве H_k. Тогда S_α замкнуто в H_k и его можно разложить в прямую сумму двух взаимно ортогональных инвариантных относительно A подпространств S и S'; где S имеет конечную размерность, а S' составлено из собственных векторов оператора A, причем квадратичная форма (x, x) не вырождается и положительна на S', так что S' есть гильбертово пространство. (Заметим, что если S_α само имеет конечную размерность, то можно считать, что $S = S_\alpha$.)

На конечномерном подпространстве S оператор A имеет следующие свойства. Обозначим элементарные делители оператора A на S через D_1, $D_2, \ldots, D_r$, а их порядки — соответственно через $d_1, d_2, \ldots, d_r$, тогда число непростых элементарных делителей каждого данного порядка является инвариантом оператора A и числа α. Далее, если положить

$$\rho(\alpha) = \sum_{i=1}^{r} \left[\frac{d_i}{2}\right], \quad \left(\left[\frac{d_i}{2}\right] \text{— целая часть от } \frac{d_i}{2}\right), \tag{10}$$

то существует в S подпространство P_α размерности $\rho(\alpha)$, на котором квадратичная форма (x, x) тождественно обращается в нуль и, следовательно, $\rho(\alpha) \leqslant k$ (§ 1, (B)).

---

*) Предложение (B) и теорема 3 в дальнейшем не используются.

При доказательстве предложения (В) мы будем считать, что $\alpha=0$. Это не налагает никаких ограничений, просто вместо симметрического оператора A следует рассматривать симметрический оператор $A-\alpha E$.

Если $S_\alpha=S_0$ имеет конечную размерность, то положим $S=S_0$. Если S_0 бесконечномерно, то обозначим через S_0^i множество всех векторов x из S_0, для которых $A^i x=0$. Имеем $S_0^i\subset S_0^{i+1}$, $i=1, 2, \ldots$

Пусть $P\subset Q$ два линейные многообразия; индексом P в Q будем называть максимальное число векторов из Q, линейно независимых относительно P. Если индекс P в Q конечен и равен r, то в Q существует линейное многообразие R размерности r такое, что Q распадается в прямую сумму P и R, $Q=P\dot{+}R$.

Покажем, что индекс S_0^i в S_0^{i+1} не превосходит k и, следовательно, конечен.

Пусть R — такое линейное многообразие из S_0^{i+1}, что пересечение S_0^i и R содержит лишь нуль. Тогда $A^iR\subset S_0^1$, причем отображение A^i линейно и взаимно однозначно на R, так что A^iR имеет ту же размерность, что R. Пусть, далее, $y\in R$ и $x\in S_0^1$. Тогда

$$(x, A^i y)=(A^i x, y)=(0, y)=0$$

и, следовательно, пространство S_0^1 ортогонально к A^iR. Так как $A^iR\subset S_0^1$, то, в частности, A^iR ортогонально самому себе и потому размерность A^iR не превосходит k (§ 1, (В)).

Пусть t — натуральное число такое, что S_0^{t-1} отлично от S_0^t. Обозначим через R_0^t конечномерное пространство из S_0^t такое, что $S_0^t=S_0^{t-1}\dot{+}R_0^t$. Тогда отображение A взаимно однозначно на R_0^t, и пересечение S_0^{t-2} и AR_0^t содержит лишь нуль. Благодаря этому S_0^{t-1} можно так разложить в прямую сумму $S_0^{t-1}=S_0^{t-2}\dot{+}R_0^{t-1}$, что $AR_0^t\subset R_0^{t-1}$. Продолжая этот процесс дальше и полагая $R_0^1=S_0^1$, получим такую последовательность

$$R_0^1,\ R_0^2,\ \ldots,\ R_0^t, \tag{11}$$

что S_0^t является прямой суммой членов последовательности (11), причем $AR_0^i\subset R_0^{i-1}$, $i=2, 3, \ldots, t$.

Положим $A^iR_0^{2i}=Q_0^i$; $i=1, 2, \ldots, \left[\frac{t}{2}\right]$. Тогда $Q_0^i\subset R_0^i$. Из этого следует, что можно составить прямую сумму:

$$P_0^t=Q_0^1\dot{+}Q_0^2\dot{+}\ldots\dot{+}Q_0^{\left[\frac{t}{2}\right]}.$$

Покажем, что на P_0^t квадратичная форма (x, x) тождественно равна нулю. Для этого достаточно показать, что пространства Q_0^i и Q_0^j ортогональны между собой при произвольных i и j, не превосходящих $\left[\frac{t}{2}\right]$.

Будем считать, что $i \leqslant j$ и пусть $x \in Q_0^i$, $y \in Q_0^j$. Тогда $x = A^i x'$, $y = A^j y'$ и

$$(x, y) = (A^i x', A^j y') = (A^{i+j} x', y') = (0, y') = 0.$$

Таким образом, размерность P_0^t не превосходит k и, в частности, мы видим, что $t \leqslant 2k+1$. Таким образом, последовательность $S_0^1, S_0^2, \ldots$ $\ldots S_0^t, \ldots$ стабилизируется на конечном номере, и мы можем считать, что за t принято максимальное число, для которого S_0^t не совпадает с S_0^{t-1}. Если индекс S_0^{i-1} в S_0^i обозначить через r_0^i, то размерность R_0^i равна r_0^i, и мы получаем в многообразии S_0 подпространство P_0^t размерности $\rho = r_0^2 + r_0^4 + \ldots + r_0^{2i} + \ldots + r_0^{2\left[\frac{t}{2}\right]}$, причем на P_0^t квадратичная форма (x, x) тождественно равна нулю.

Пусть x^i — вектор из R_0^i, не принадлежащий к AR_0^{i+1}. Тогда векторы $x^i, Ax^i, \ldots, A^{i-1}x^i$ линейно независимы. Линейную оболочку этих векторов обозначим через N_{x^i}. Очевидно, что пространство N_{x^i} инвариантно относительно A, и A имеет на N_{x^i} единственный элементарный делитель порядка i. Пусть $x^i, y^i, z^i, \ldots$ — максимальная система векторов из R_0^i, линейно независимых относительно AR_0^{i+1}; тогда совокупность всех пространств вида $N_{x^i}, N_{y^i}, N_z, \ldots, i = 1, 2, \ldots, t$ составляет разложение в прямую сумму пространства S_0. Из этого видно, что число элементарных делителей порядка i преобразования A пространства S_0 равно $r_0^i - r_0^{i+1} = p_0^i$.

Из последнего следует:

$$r_0^i = p_0^i + p_0^{i+1} + \ldots + p_0^t.$$

Таким образом,

$$\rho = \sum_{i=2}^{t} \left[\frac{i}{2}\right] p_0^i,$$

что совпадает с соотношением (10).

До сих пор доказательство велось без предположения замкнутости A. Здесь благодаря тому, что размерность S_0 может быть бесконечной, употребление понятия элементарных делителей представляется не вполне обоснованным, хотя, конечно, при той сравнительно простой структуре, которую имеет оператор A на S_0, теорию элементарных делителей можно было бы развить без большого труда.

Допустим теперь, что оператор A замкнутый. Так как S_0^1 составлено из собственных векторов оператора A для собственного значения 0, линейное многообразие S_0^1 замкнуто и является подпространством пространства H_k. Ввиду того, что индекс S_0^1 в S_0 конечен, многообразие S_0 также является подпространством в H_k.

Выберем теперь в H_k какие-либо координаты и обозначим через S' пересечение S_0^1 с H_+. Очевидно, что квадратичная форма (x, x) не вырождается на S' и имеет постоянный знак $+$, ибо так обстоит дело для H_+. В силу теоремы 2 пространство H_k разлагается в прямую

сумму подпространства S' и некоторого подпространства H_k'. Если обозначить через S пересечение S_0 с H_k', то очевидно, что $S_0 = S \dot{+} S'$. Так как S' инвариантно относительно преобразования A, именно $AS' = \{0\}$, то и пространство H_k' также инвариантно относительно A, а отсюда следует и инвариантность S. Теперь мы можем провести для S все построения, проведенные ранее для S_0. Важным различием является лишь тот факт, что размерность S^1 конечна, ибо пересечение S^1 с H_+ содержит лишь нуль. Так как индекс S^1 в S конечен, то и размерность всего S тоже конечна. Ввиду этого применение элементарных делителей к пространству S не требует теперь уже никаких дополнительных разъяснений, и полученные выше для S_0 соотношения, примененные к S, дают полное доказательство предложения (B).

Итак, предложение (B) полностью доказано.

Суммируя результаты, данные в (A) и (B), мы можем формулировать теорему:

ТЕОРЕМА 3. *Пусть λ — собственное значение симметрического оператора A, действующего в пространстве H_k. Если λ невещественно, то через $\rho(\lambda)$ обозначим размерность собственного многообразия числа λ. Если λ вещественно, то через $\rho(\lambda)$ обозначим число, введенное в (B). При вещественном λ, число $\rho(\lambda)$, очевидно, равно нулю, если все собственное многообразие его составлено из собственных векторов, т. е. в том случае, когда все элементарные делители, принадлежащие к собственному значению λ, просты. Выберем теперь произвольную систему собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ такую, что она не содержит двух сопряженных между собой. В частности, за эту систему можно взять совокупность всех собственных значений с неотрицательной мнимой частью. Тогда*

$$\rho(\lambda_1) + \rho(\lambda_2) + \ldots + \rho(\lambda_n) \leqslant k.$$

Доказательство. При комплексном λ обозначим через P_λ собственное многообразие числа λ. При вещественном λ за P_λ примем то пространство, на котором в силу (B) квадратичная форма (x, x) тождественно обращается в нуль. Тогда размерность P_λ равна $\rho(\lambda)$. Прямая сумма всех пространств P_λ, $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, дает некоторое пространство P, на котором квадратичная форма (x, x) тождественно обращается в нуль, ибо в силу (A) и (B) каждое P_{λ_i} ортогонально каждому P_{λ_j}, включая и случай $i = j$. Таким образом, в силу предложения (B) § 1, размерность P не превосходит k.

Итак, теорема 3 доказана.

Для пространства H_k теорема 3 заменяет предложение о том, что симметрический оператор в гильбертовом пространстве имеет только действительные собственные значения и допускает лишь простые элементарные делители.

Дадим теперь определение эрмитова оператора применительно к пространству H_k, сделав предварительно некоторые замечания.

(С) Если L — линейный функционал, действующий в пространстве H_k, то существует такой вектор l из H_k, что $Lx=(x, l)$ при любом $x \in H_k$.

Так как линейные операции и сходимость определены в H_k точно так же, как в гильбертовом пространстве, то существует последовательность чисел $l'_1, \ldots, l'_k, l'_{k+1}, \ldots$ со сходящейся суммой квадратов модулей такая, что

$$Lx = x_1\bar{l}'_1 + \ldots + x_k\bar{l}'_k + x_{k+1}\bar{l}'_{k+1} + \ldots \tag{12}$$

при произвольном $x \in H_k$. За координаты вектора l примем теперь числа $-l'_1, \ldots, -l'_k, +l'_{k+1}, \ldots$ Тогда соотношение (12) запишется в форме $Lx=(x, l)$.

(D) Говорят, что последовательность $x^1, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ элементов из H_k слабо сходится к x, $x^n \to x$, если $\lim\limits_{n\to\infty}(x^n, y)=(x, y)$, или, что то же, $\lim\limits_{n\to\infty}(y, x^n)=(y, x)$ при всяком $y \in H_k$. Так же как и в случае гильбертова пространства, для слабой сходимости достаточно выполнения одного из указанных соотношений при $y \in M$, где M — множество, всюду плотное в H_k.

Определение 3. Пусть A — линейный оператор в H_k с всюду плотной областью определения Ω и $y \in H_k$. Может случиться, что для всякого $x \in \Omega$ имеет место соотношение

$$(Ax, y)=(x, z). \tag{13}$$

Множество всех y, удовлетворяющих условию (13), обозначим через Ω^* и положим $z=A^*y$. Так как множество Ω всюду плотно в H_k, то соотношение (13) однозначно определяет z и потому A^* является линейным оператором с областью определения Ω^*. Оператор A^* называется сопряженным с A. Если $A^*=A$, т. е. $\Omega^*=\Omega$ и $A^*x=Ax$ для всякого $x \in \Omega$, то оператор A называется эрмитовым.

(E) Пусть A — эрмитов оператор с областью определения $\Omega \subset H_k$ и $y^1, y^2, \ldots, y^n, \ldots$ — такая последовательность элементов из Ω, что $y^n \to y$, $Ay^n \to z$ (см. (D)); тогда $y \in \Omega$ и $Ay=z$.

Для всякого $x \in \Omega$

$$(Ax, y)=\lim_{n\to\infty}(Ax, y^n)=\lim_{n\to\infty}(x, Ay^n)=(x, z),$$

т. е. $(Ax, y)=(x, z)$, и в силу того, что оператор A — эрмитов, это означает, что $y \in \Omega$, $Ay=z$.

Как обычно, линейный оператор A, действующий в H_k, будем называть непрерывным, если область его определения совпадает с H_k и из $x^n \Rightarrow x$ следует $Ax^n \Rightarrow Ax$ ($\Rightarrow$ означает сильную сходимость).

(F) Непрерывный эрмитов оператор P будем называть **проектирующим**, если $P^2=P$. В предположении, что P — проектирующий оператор, обозначим через H' множество всех векторов вида Px, где $x \in H_k$. Оказывается, что H' является подпространством пространства H_k, на котором квадратичная форма (x, x) не вырождается. Ортогональное дополнение к H' в H_k обозначим через H''; тогда, при $x' \in H'$, $x'' \in H''$, имеем

$$Px' = x', \quad Px'' = 0. \tag{14}$$

Очевидно, что условиями (14) оператор P определен однозначно через пространство H'. Если исходить из заданного подпространства H' с невырождающейся квадратичной формой (x, x) и обозначить через H'' его ортогональное дополнение, то соотношения (14) определяют проектирующий оператор P. Проектирующий оператор P и подпространство H' будем называть **взаимно соответствующими**.

Множество H', определенное как совокупность всех векторов вида Px, очевидно, является линейным многообразием в H_k, но оно также и замкнуто. Действительно, если $x \in H'$, то $Px=x$, и, наоборот, если $Px=x$, то $x \in H'$. Таким образом, H' можно определить как совокупность всех векторов $x \in H_k$, для которых $Px=x$, а это соотношение, в силу непрерывности оператора P, определяет замкнутое множество в H_k. Покажем теперь, что на H' квадратичная форма (x, x) не вырождается. Если $h \in H'$ — такой вектор, что при произвольном $x \in H'$, $(x, h)=0$, то при произвольном векторе $y \in H_k$

$$(y, h) = (y, Ph) = (Py, h) = (x, h) = 0.$$

Так как на пространстве H_k квадратичная форма (x, x) не вырождается, то $h=0$. Ортогональное дополнение к H' в H_k обозначим через H''. Если $x'' \in H''$ и $x \in H_k$, то $(Px'', x) = (x'', Px) = 0$, т. е. $Px''=0$. Наоборот, если $Px=0$ и $x' \in H'$, то $(x, x') = (x, Px') = (Px, x') = 0$, т. е. $x \in H''$. Таким образом, подпространство H'' определяется как совокупность всех векторов x из H_k, для которых $Px=0$.

Если H' есть подпространство пространства H_k, на котором квадратичная форма (x, x) не вырождается, и H'' — ортогональное дополнение H' в H_k, то соотношения (14), очевидно, определяют проектирующий оператор.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть A — эрмитов оператор с областью определения $\Omega \subset H_k$. $H'' \subset \Omega$ — некоторое конечномерное подпространство пространства H_k с невырождающейся квадратичной формой (x, x) и H' — ортогональное дополнение H'' в H_k. Через P обозначим проектирующий оператор, соответствующий подпространству H'. Тогда оператор $B=PAP$ тоже эрмитов и имеет своей областью определения Ω. Если оператор B рассматривать на подпространстве H', то на нем он тоже является эрмитовым и имеет своей областью определения $\Omega' = \Omega \cap H'$.*

Доказательство. Все относящееся к H' будем отмечать значком $'$, а относящееся к H'' значком $''$. Таким образом, оператор B, рассматриваемый на H', будем обозначать через B'.

Так как $H'' \subset \Omega$, то $\Omega = H'' \dotplus \Omega'$. Из этого и из того, что Ω всюду плотно в H_k, следует, что Ω' всюду плотно в H'. Областью определения оператора B' является множество Ω'. Покажем, что сопряженный к B' оператор B'^* имеет ту же область определения и совпадает с B' на ней. Этим самым будет установлена эрмитовость оператора B' в H'.

Пусть y' — такой вектор из H', что при произвольном $x' \in \Omega'$

$$(B'x', y') = (x', z'). \tag{15}$$

Из этого соотношения следует

$$(PAPx', y') = (Ax', y') = (x', z'). \tag{16}$$

Если $x'' \in H''$, то (Ax'', y') является линейным функционалом вектора x'' в H'', ибо $H'' \subset \Omega$. Таким образом,

$$(Ax'', y') = (x'', z'') \quad \text{(см. (C))}. \tag{17}$$

Складывая (16) и (17), получаем

$$(A(x' + x''), y') = (x' + x'', z' + z'').$$

Иначе это можно переписать в виде: $(Ax, y') = (x, z)$, где x — произвольный вектор из Ω. В силу эрмитовости оператора A из последнего соотношения следует $y' \in \Omega'$. Тогда из (15) вытекает $(B'x', y') = (PAPx', y') = (x', PAPy') = (x', B'y')$ и, следовательно, эрмитовость оператора B' доказана.

Рассмотрим теперь оператор B. Областью его определения, как легко видеть, является Ω. Пусть y — такой вектор из H_k, что для произвольного $x \in \Omega$ имеем $(Bx, y) = (x, z)$. Иначе это можно переписать так:

$$(PAP(x' + x''),\ y' + y'') = (Ax', y') = (x', z') + (x'', z'').$$

При $y'' = 0$ мы получаем соотношение (16), из которого мы уже раньше вывели, что $y' \in \Omega'$, но так как $H'' \subset \Omega$, то $y = y' + y'' \in \Omega$. Из этого, далее, следует

$$(Bx, y) = (PAPx, y) = (x, PAPy) = (x, By).$$

Таким образом, теорема доказана.

§ 3. Эрмитовы операторы в пространстве H_k

В этом параграфе устанавливается главное специфическое свойство эрмитова оператора в H_k $(k > 0)$ — существование собственных значений (см. основную теорему).

При проведении доказательства основной теоремы некоторые детали его, характера лемм, будут помещены не впереди доказательства, а после него, для того чтобы основной ход рассуждений сделать более отчетливым.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Пусть A — эрмитов оператор с областью определения $\Omega \subset H_k$. Тогда в H_k существует инвариантное подпространство I размерности k, квадратичная форма (x, x) на котором неположительна, т. е., для каждого $x \in I$, $(x, x) \leqslant 0$ (см. определения 1 и 3). Сверх того, все собственные значения оператора A в I имеют неотрицательную мнимую часть.*

Доказательство. В пространстве H_k выберем такие координаты, при которых H_- содержится в Ω. Это всегда можно сделать. Действительно, допустим, что в H_k взяты произвольные координаты и $e_1', e_2', \ldots, e_k'$ — базис пространства H_-' при этих координатах. Так как Ω всюду плотно в H_k, то для каждого вектора e_p' найдется сколь угодно близкий к нему вектор $e_p'' \in \Omega$. Линейную оболочку векторов $e_1'', e_2'', \ldots, e_k''$ обозначим через H_-. Ввиду близости каждого вектора e_p'' к e_p' квадратичная форма (x, x) не вырождается на H_- и имеет постоянный знак минус. Ортогональное дополнение к H_- обозначим через H_+. Выбирая в H_- и H_+ произвольные ортогональные координаты, мы получим желаемую систему координат в H_k. Нормальный ортогональный базис в H_- составим из некоторых векторов $e_1, e_2, \ldots, e_k$. Итак,

$$(e_p, e_q) = -\delta_{pq}, \quad e_p \in \Omega, \quad p = 1, 2, \ldots, k; \quad q = 1, 2, \ldots, k. \tag{1}$$

В основу всего дальнейшего построения будет положено расщепление пространства H_k в прямую сумму $H_- \dot{+} H_+$. В соответствии с этим каждый вектор из H_k запишем в форме

$$c + x = \sum_{p=1}^{k} c_p e_p + x, \quad c \in H_-, \quad x \in H_+. \tag{2}$$

Проектирующие операторы, соответствующие подпространствам H_- и H_+, обозначим через P' и P (см. § 2). Пусть

$$F = P'AP', \quad V = PAP. \tag{3}$$

Здесь F — эрмитов оператор, действующий в H_-, а V — эрмитов оператор, действующий в H_+, область определения которого $\Omega' = \Omega \cap H_+$ (см. теорему 4). Мы имеем

$$A = (P + P')\, A\, (P + P') = V + F + PAP' + P'AP. \tag{4}$$

В силу (4)

$$Ae_p = Fe_p - u_p = \sum_{q=1}^{k} f_{pq} e_q - u_p, \quad u_p \in H_+, \tag{5}$$

$$Ax = Vx + P'Ax, \quad P'Ax = y \in H_-, \quad x \in H_+. \tag{6}$$

Вектор y, принадлежащий H_-, можно записать в форме

$$y = \sum_{p=1}^{k} -(y, e_p)\, e_p, \tag{7}$$

что проверяется умножением справа на e_q (см. (1)). Эрмитовость оператора A дает $(Ax, e_p) = (x, Ae_p)$. На основе соотношений (5) и (6) последнее можно переписать так:

$$(y, e_p) = -(x, u_p).$$

Таким образом, соотношение (6) получает вид

$$Ax = Vx + \sum_{p=1}^{k} (x, u_p) e_p. \tag{8}$$

Объединяя (5) и (8), мы на основе (2) окончательно получаем

$$A(c+x) = \sum_{p,q=1}^{k} f_{pq} c_p e_q + \sum_{q=1}^{k} (x, u_q) e_q + Vx - \sum_{p=1}^{k} c_p u_p. \tag{9}$$

Поставим теперь перед собой задачу отыскания собственного вектора $c+x$ оператора A, $A(c+x) = \lambda(c+x)$. Это соотношение в силу (9) можно записать так:

$$\sum_{p=1}^{k} f_{pq} c_p + (x, u_q) = \lambda c_q, \tag{10}$$

$$Vx - \sum_{p=1}^{k} c_p u_p = \lambda x. \tag{11}$$

Будем пытаться решить систему уравнений (10) и (11). Для этого введем в рассмотрение резольвенту R_λ эрмитова оператора V в пространстве H_+. Резольвента эта определена для всех комплексных (недействительных) значений λ, так как H_+ представляет собою обычное гильбертово пространство, а V — обычный эрмитов оператор, действующий в нем. Приводимые ниже вычисления носят эвристический характер — и потому не нужно смущаться размышлениями о том, имеют ли они смысл при всех входящих в них значениях величин. Уравнение (11) перепишем в виде

$$x = \sum_{p=1}^{k} c_p R_\lambda u_p. \tag{12}$$

Подставляя выражение для x из последнего в (10), получаем

$$\sum_{p=1}^{k} f_{pq} c_p + \sum_{p=1}^{k} (R_\lambda u_p, u_q) c_p = \lambda c_q. \tag{13}$$

Неизвестными в этом уравнении являются λ и координаты $c_1, c_2, \ldots, c_k$ вектора c. Операторная функция R_λ параметра λ, векторы $u_1, u_2, \ldots, u_k$ и матрица $\| f_{pq} \|$ определяются оператором A и выбором координат в H_k. В отношении чисел $c_1, c_2, \ldots, c_k$ уравнения (13) представляют собой систему однородных линейных уравнений, и для того, чтобы она имела нетривиальное решение $c \neq 0$, необходимо, чтобы детерминант этой системы обращался в нуль, т. е., чтобы

$$|f_{pq}+(R_\lambda u_p,\ u_q)-\lambda\delta_{pq}|=0. \tag{14}$$

Если последнее уравнение имеет невещественное решение λ, то оператор R_λ определен для каждого вектора из H_+ и, в частности, для всех векторов $u_1, u_2, \ldots, u_k$. В этом случае все вычисления можно обратить, и мы найдем собственный вектор $c+x$, $c\neq 0$, оператора A с невещественным собственным значением λ. Наоборот, если оператор A имеет собственный вектор $c+x$ с невещественным собственным значением λ, то все проделанные нами выкладки имеют смысл и вектор c отличен от нуля, так как вектор x, имеющий положительный квадрат (x, x), не может быть собственным для комплексного собственного значения λ (§ 2, (A)). Таким образом, если оператор A имеет невещественное собственное значение, уравнение (14) им действительно удовлетворяется.

Легко привести пример эрмитова оператора A даже в конечномерном пространстве H_k, все собственные значения которого вещественны. Таким образом, уравнение (14) может вовсе не иметь комплексных решений.

Вместо уравнения (14) мы будем рассматривать уравнение

$$|f_{pq}+(R_\lambda u_p,\ u_q)+i\varepsilon_{pq}-\lambda\delta_{pq}|=0, \qquad \|\varepsilon_{pq}\|=\mathrm{E}, \tag{15}$$

где E — позитивно-дефинитная эрмитова матрица.

Ниже будет показано (см. лемму 1), что уравнение (15) имеет ровно k корней с положительной мнимой частью. Корни эти могут быть, однако, кратными, и потому вместо уравнения (15) мы рассмотрим уравнение

$$|g_{pq}+(R_\lambda u_p,\ u_q)+i\varepsilon_{pq}-\lambda\delta_{pq}|=0, \tag{16}$$

где $G=\|g_{pq}\|$, так же как ранее F, — эрмитова матрица. Ниже будет показано (см. (A)), что можно найти матрицу G, произвольно близкую к матрице F, и произвольно малую матрицу E, так что уравнение (16) уже не имеет кратных корней с положительной мнимой частью. Корни уравнения (16) обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$; все они различны и имеют положительную мнимую часть.

Рассмотрим теперь систему уравнений, аналогичную (13):

$$\sum_{p=1}^{k} g_{pq}c_p+\sum_{p=1}^{k}(R_{\lambda_r}u_p,\ u_q)\,c_p+i\sum_{p=1}^{k}\varepsilon_{pq}c_p=\lambda_r c_q. \tag{17}$$

Система эта имеет нетривиальное решение относительно вектора c, которое мы обозначим через f_r. Координаты вектора f_r пусть будут $f'_{r1}, f'_{r2}, \ldots$ $\ldots, f'_{rk}$. Введем далее вектор

$$y_r=R_{\lambda_r}v_r, \qquad v_r=\sum_{p=1}^{k} f'_{r_p}u_p. \tag{18}$$

Последнее имеет смысл, так как λ_r невещественно. Связи между введенными величинами мы можем теперь записать так:

$$Gf_r + \sum_{q=1}^{k} (R_{\lambda_r} v_r, u_q) e_q + i\mathrm{E} f_r = \lambda_r f_r, \tag{19}$$

$$Gf_r + \sum_{q=1}^{k} (y_r, u_q) e_q + i\mathrm{E} f_r = \lambda_r f_r, \tag{20}$$

$$Vy_r + \sum_{p=1}^{k} (f_r, e_p) u_p = \lambda_r y_r. \tag{21}$$

Системы уравнений (19) и (20) при учете уравнения (21) равносильны.

Дальнейшая наша задача заключается в том, чтобы, переходя к пределу при $\mathrm{E} \to 0$ и $G \to F$, получить из векторов $f_r + y_r$, $r = 1, 2, \ldots, k$, инвариантное подпространство I.

Для дальнейших вычислений потребуются следующие основные свойства резольвенты эрмитова оператора в гильбертовом пространстве:

$$R_\lambda - R_\mu = (\lambda - \mu) R_\lambda R_\mu, \tag{22}$$

$$(R_\lambda x, y) = (x, R_{\bar\lambda} y), \text{ так что } \overline{(R_\lambda x, y)} = (R_{\bar\lambda} y, x). \tag{23}$$

Умножая соотношение (19) справа скалярно на вектор f_s, получаем

$$(Gf_r, f_s) - (R_{\lambda_r} v_r, v_s) = \lambda_r (f_r, f_s) - i (\mathrm{E} f_r, f_s). \tag{24}$$

Заменяя в соотношении (19) индекс r индексом s и умножая полученное слева скалярно на вектор f_r, мы на основании (23) находим:

$$(f_r, Gf_s) - (R_{\bar\lambda_s} v_r, v_s) = \bar\lambda_s (f_r, f_s) + i (f_r, \mathrm{E} f_s). \tag{25}$$

Вычитая из соотношения (25) соотношение (24), получаем

$$((R_{\lambda_r} - R_{\bar\lambda_s}) v_r, v_s) = -(\lambda_r - \bar\lambda_s)(f_r, f_s) + 2i (\mathrm{E} f_r, f_s). \tag{26}$$

В силу (22) и (23)

$$(R_{\lambda_r} v_r, R_{\lambda_s} v_s) = -(f_r, f_s) + \frac{2i}{\lambda_r - \bar\lambda_s} (\mathrm{E} f_r, f_s). \tag{27}$$

Последнее соотношение можно переписать в виде

$$(y_r, y_s) = -(f_r, f_s) + \frac{2i}{\lambda_r - \bar\lambda_s} (\mathrm{E} f_r, f_s). \tag{28}$$

Соотношение (28) во всем дальнейшем играет основную роль. Перепишем его в несколько иной форме. Пусть $d_1, d_2, \ldots, d_k$ — произвольные комплексные числа. Положим

$$d = \sum_{r=1}^{k} d_r f_r, \quad Yd = \sum_{r=1}^{k} d_r y_r. \tag{29}$$

Здесь Y пока ещё не оператор, так как Yd не определяется самим вектором d, но задается числами $d_1, d_2, \ldots, d_k$, которые, быть может, не определяются вектором d, ибо мы еще не знаем, что векторы $f_1, f_2, \ldots$

$\ldots f^r$ линейно независимы. Умножая соотношение (28) на $d_r\bar{d}_s$ и суммируя по r и s, получаем

$$(Yd, Yd) = -(d, d) + \sum_{r,s=1}^{k} \frac{2i}{\lambda_r - \bar{\lambda}_s} (\mathrm{E}\, d_r f_r, d_s f_s). \tag{30}$$

Ниже будет показано (см. (B)), что при тех предположениях, которые нами сделаны относительно входящих в рассмотрение величин, имеет место неравенство

$$\sum_{r,s=1}^{k} \frac{i}{\lambda_r - \bar{\lambda}_s} (\mathrm{E} d_r f_r, d_s f_s) < -\delta \sum_{r=1}^{k} d_r \bar{d}_r \quad (\delta > 0). \tag{31}$$

Покажем теперь, что векторы $f_1, f_2, \ldots, f_k$ линейно независимы. Допустим противоположное. Тогда существуют такие числа $d_1, d_2, \ldots, d_k$, не обращающиеся одновременно в нуль, что $d = 0$ и в этом случае из (30) и (31) вытекает невозможное неравенство

$$(Yd, Yd) < -2\delta \sum_{r=1}^{k} d_r \bar{d}_r. \tag{32}$$

Ввиду линейной независимости векторов $f_1, f_2, \ldots, f_k$ всякий вектор d из H_- может быть выражен в форме (29), причем числа $d_1, d_2, \ldots, d_k$ однозначно определяются вектором d. В силу этого Y есть линейный оператор, определенный на пространстве H_-.

Так как $Yd \in H_+$ и H_+ — обычное гильбертово пространство, то $\| Yd \|^2 = (Yd. Yd)$. Вследствие того, что $d \in H_-$ и H_- — конечномерное пространство с невырождающейся отрицательной квадратичной формой (d, d), то $\| d \|^2 = -(d, d)$. Из соотношений (30) и (31) мы получаем

$$\| Yd \| \leqslant \| d \|. \tag{33}$$

Пользуясь оператором Y, перепишем по-новому соотношение (20). Для этого помножим его на d_r и просуммируем по r:

$$Gd + \sum_{q=1}^{k} (Yd, u_q) e_q + i\mathrm{E}d = \sum_{r=1}^{k} \lambda_r d_r f_r. \tag{34}$$

Стоящее в правой части последнего соотношения выражение линейно зависит от чисел $d_1, d_2, \ldots, d_k$ и мы будем трактовать его как результат применения оператора Λ к вектору d:

$$\Lambda d = \sum_{r=1}^{k} \lambda_r d_r f_r, \quad \Lambda f_r = \lambda_r f_r. \tag{35}$$

Оператор Λ дает отображение пространства H_- в себя. Соотношение (34) переписывается теперь в виде

$$Gd + \sum_{q=1}^{k} (Yd, u_q) e_q + i\mathrm{E}d = \Lambda d. \tag{36}$$

Из соотношений (33) и (36) следует важное неравенство

$$\|\Lambda d\| < C \| d \| . \qquad (37)$$

Здесь положительная константа C при заданном операторе A и выбранных в H_k определенных координатах зависит лишь от матриц G и E, но остается ограниченной, когда элементы этих матриц ограничены.

Из (35) следует, что собственные значения Λ равны $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, числа же эти все имеют положительную мнимую часть.

Пользуясь операторами Y и Λ, мы можем записать соотношение (21) в виде

$$VYf_r + \sum_{p=1}^{k} (f_r e_p)\, u_p = Y\Lambda f_r . \qquad (38)$$

Умножая последнее на d_r и суммируя по r, получаем

$$VYd + \sum_{p=1}^{k} (d, e_p)\, u_p = Y\Lambda d. \qquad (39)$$

Вспомним теперь, что построенные нами операторы Y и Λ зависят от матриц G и E, значения которых до сих пор почти ничем не были ограничены. Выберем последовательность значений $E^{(1)}, \ldots, E^{(n)}, \ldots$ матрицы E, сходящуюся к нулю, и такую последовательность матриц $G^{(1)}, \ldots, G^{(n)}, \ldots$, сходящуюся к F, чтобы уравнение (16) не имело кратных нулей в верхней полуплоскости переменного λ ни при каком n. Соответственные значения операторов Λ и Y обозначим через $\Lambda^{(n)}$ и $Y^{(n)}$.

Неравенство (33) показывает, что норма вектора $Y^{(n)} e_p$ меньше единицы, а потому из последовательности $Y^{(n)} e_p$, $n = 1, 2, \ldots$, можно выбрать слабо сходящуюся. Точно так же в силу неравенства (37) из последовательности векторов $\Lambda^{(n)} e_p$, $n = 1, 2, \ldots$, можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Так как векторов e_p имеется ровно k, то, производя последовательные выборки, мы придем к такой подпоследовательности

$$n_1, n_2, \ldots, n_m, \ldots$$

натурального ряда 1, 2, ..., для которой

$$Y^{(n_m)} e_p \longrightarrow Z e_p, \quad \Lambda^{(n_m)} e_p \longrightarrow \mathrm{M} e_p . \qquad (40)$$

Ввиду того, что векторы $e_1, e_2, \ldots, e_k$ составляют базис пространства H_-, соотношения (40) можно записать в виде

$$Y^{(n_m)} d \longrightarrow Z d, \quad \Lambda^{(n_m)} d \longrightarrow \mathrm{M} d . \qquad (41)$$

Так как все собственные значения оператора Λ имеют положительную мнимую часть, то предельный оператор M имеет собственные значения с неотрицательной мнимой частью. Ввиду того, что оператор Y удовлетворяет неравенству (33), предельный оператор Z также удовлетворяет неравенству

$$\|Zd\| \leqslant \|d\| \quad \text{или} \quad -(d, d) + (Zd, Zd) \leqslant 0, \tag{42}$$

хотя и имеет место лишь слабая сходимость.

Теперь в соотношениях (36) и (39) можно произвести предельный переход. В соотношении (36) скалярное произведение сходится при слабой сходимости первого вектора, а остальные члены не вызывают сомнения. В соотношении (39) все члены, кроме VYd, очевидно, сходятся, а потому и VYd слабо сходится к некоторому вектору. Таким образом, в силу (E) § 2 оператор V определен на векторе Zd и слабый предел VYd равен VZd.

Итак,

$$Fd + \sum_{q=1}^{k} (Zd, u_q)\, e_q = \mathrm{M}d, \tag{43}$$

$$VZd + \sum_{p=1}^{k} (d, e_p)\, u_p = Z\mathrm{M}d. \tag{44}$$

В силу (9)

$$A(d + Zd) = \mathrm{M}d + Z\mathrm{M}d. \tag{45}$$

Множество I всех векторов вида $d + Zd$, где $d \in H_-$, составляет, как легко видеть, k-мерное подпространство пространства H_k. Из неравенства (42) вытекает

$$(d + Zd,\ d + Zd) \leqslant 0. \tag{46}$$

Таким образом, квадратичная форма (x, x) на I неположительна.

Соотношение (45) показывает, что подпространство I инвариантно относительно оператора A и рассматриваемый на нем оператор A эквивалентен оператору M. Следовательно, все собственные значения оператора A на I имеют неотрицательные мнимые части.

Итак, основная теорема доказана с точностью до трех отложенных на дальнейшее предложений. Перейдем теперь к их доказательству.

ЛЕММА 1. *Пусть R_λ — резольвента некоторого эрмитова оператора V, действующего в гильбертовом пространстве H, $u_1, u_2, \ldots, u_k$ — произвольная конечная система векторов из H, $G = \| g_{pq} \|$, $\mathrm{E} = \| \varepsilon_{pq} \|$, $(p, q) = 1, 2, \ldots, k$, — эрмитовы матрицы, последняя из которых позитивно-дефинитна. Тогда уравнение*

$$| g_{pq} + (R_\lambda u_p, u_q) + i\varepsilon_{pq} - \lambda\delta_{pq} | = 0 \tag{47}$$

относительно λ имеет ровно k корней с положительной мнимой частью.

Доказательство. Пусть α — действительное число, удовлетворяющее неравенству $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Рассмотрим уравнение

$$| g_{pq}\alpha + (R_\lambda u_p, u_q)\,\alpha + i\varepsilon_{pq} - \lambda\delta_{pq} | = 0. \tag{48}$$

При $\alpha = 1$ уравнение это совпадает с (47), а при $\alpha = 0$ получает вид $|i\varepsilon_{qp} - \lambda\delta_{qp}| = 0$. Это последнее имеет k нулей в верхней полуплоскости.

Доказательство будет заключаться в непрерывном переходе от последнего уравнения к уравнению (47).

Положим $\lambda = \mu + i\nu$. Пользуясь функциями оператора V, мы можем дать следующее выражение для резольвенты:

$$R_\lambda = S_\lambda + iT_\lambda, \quad S_\lambda = \frac{V - \mu E}{(V - \mu E)^2 + \nu^2 E}, \quad T_\lambda = \frac{\nu E}{(V - \mu E)^2 + \nu^2 E}. \tag{49}$$

При $\nu > 0$ операторы S_λ и T_λ ограничены, а последний из них позитивен.

Относительно чисел $c_1, c_2, \ldots, c_k$ рассмотрим систему линейных уравнений

$$\alpha \sum_{p=1}^{k} g_{pq} c_p + \alpha \sum_{p=1}^{k} (S_\lambda u_p, u_q)\, c_p + \alpha i \sum_{p=1}^{k} (T_\lambda u_p, u_q)\, c_p + \\ + i \sum_{p=1}^{k} \varepsilon_{pq} c_p = \mu c_q + i\nu c_q. \tag{50}$$

Если λ есть решение уравнения (48), то существует нетривиальное решение системы (50), — вектор c с координатами $c_1, c_2, \ldots, c_k$, удовлетворяющий условию $\|c\| = 1$. Положим

$$u = \sum_{p=1}^{k} c_p u_p. \tag{51}$$

Умножая соотношение (50) на $\overline{c_q}$ и суммируя по q, получаем

$$\alpha (Gc, c) + \alpha (S_\lambda u, u) + \alpha i (T_\lambda u, u) + i (\mathrm{E}c, c) = \mu + i\nu. \tag{52}$$

Выделяя мнимую часть из (52), находим

$$\nu = \alpha (T_\lambda u, u) + (\mathrm{E}c, c) \tag{53}$$

Таким образом, для корня уравнения (48) получаем

$$\nu \geqslant (\mathrm{E}c, c) > \varepsilon > 0. \tag{54}$$

В силу известных свойств резольвенты, при $\nu > \varepsilon$ имеем

$$(R_\lambda u, u) < \frac{C}{\rho} \text{ при } |\lambda| > \rho. \tag{55}$$

Здесь C — некоторая положительная константа, а ρ — достаточно большое число.

Зададим теперь в плоскости переменного λ область U, определяемую условиями $\nu > \varepsilon$, $|\lambda| < \rho'$. Из соотношений (52) и (55) видно, что при достаточно большом ρ' все корни уравнения (48), лежащие в верхней полуплоскости, принадлежат области U; в частности, они не попадают на ее границу. Это справедливо при любом α, удовлетворяющем условию $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Поэтому число корней уравнения (48), лежащих в области U, не зависит от α. Число же корней верхней полуплоскости, расположенных вне U, все время остается равным нулю. Из этого видно, что число корней уравнения (48), лежащих в верхней полуплоскости, сов-

падает с таковым же для уравнения $|i\varepsilon_{pq} - \lambda\delta_{pq}| = 0$, а для него число это равно k.

Итак, лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. *Пусть R_λ — резольвента эрмитова оператора, действующего в гильбертовом пространстве H, и $u_1, u_2, \ldots, u_k$, — произвольная система векторов из этого пространства, а $M = \| m_{pq} \|$, $(p, q) = 1, 2, \ldots, k$ — произвольная матрица с комплексными элементами. Рассмотрим уравнение*

$$f(\lambda) = | m_{pq} + (R_\lambda U_p, U_q) - \lambda\delta_{pq} | = 0. \tag{56}$$

Оказывается, что в пространстве всех матриц M существует всюду плотное множество матриц, для которых уравнение (56) *не имеет кратных невещественных корней.*

Доказательство. Положим

$$T(\lambda) = \| (R_\lambda u_p, u_q) - \lambda\delta_{pq} \|. \tag{57}$$

Матрица $T(\lambda)$ является аналитической функцией параметра λ для всех его невещественных значений. Матрица эта не может быть константой, так как для некоторых значений матрицы M уравнение (56) имеет в верхней полуплоскости ровно k корней (лемма 1).

Пусть λ' — кратный корень уравнения (56) при $M = M'$. Разложим матрицу $T(\lambda)$ в ряд по степеням параметра $\mu = (\lambda - \lambda')$:

$$T(\lambda) = A + B\mu^r + \ldots +, \quad A = \| a_{pq} \|, \quad B = \| b_{pq} \|. \tag{58}$$

Здесь B — первый из коэффициентов степеней μ, отличный от нуля. Минор элемента $m_{pq} + a_{pq}$ матрицы $M + A$ обозначим через M_{pq}, тогда разложение функции $f(\lambda)$ по степеням μ примет вид

$$f(\lambda) = D(M) + \Lambda(M)\mu^r + \ldots, \quad D(M) = | m_{pq} + a_{pq} |,$$
$$\Lambda(M) = \sum_{(p,q=1)}^{k} b_{pq} M_{pq}. \tag{59}$$

Здесь степени μ более высокие, чем r-ая, не выписаны. $D(M)$ и $\Lambda(M)$ представляют собою полиномы относительно комплексных переменных — элементов матрицы M. Полином $D(M)$, являющийся детерминантом, неприводим, и так как полином $\Lambda(M)$ не делится на полином $D(M)$, то пересечение алгебраических многообразий $D(M) = 0$ и $\Lambda(M) = 0$ нигде не плотно в многообразии $D(M) = 0$.

Имеем $D(M') = 0$; если $\Lambda(M') = 0$, то выберем матрицу M'', произвольно близкую к M' и такую, чтобы

$$D(M'') = 0, \quad \Lambda(M'') \neq 0. \tag{60}$$

Из (59) следует, что при $M = M''$ уравнение (56) имеет r-кратный корень λ'. При $M = M'$ кратность корня λ' могла быть только больше r; если она понизилась, то это значит, что некоторые корни сместились с точки λ'.

Существует теперь настолько малое положительное число ε, что при $M = M''$ в круге $|\lambda - \lambda'| \leqslant \varepsilon$ уравнение (56) имеет ровно r корней с учетом их кратности, а уравнение

$$\frac{d^{r-1} f(\lambda)}{d\lambda^{r-1}} = 0 \tag{61}$$

ровно один корень. Корни уравнения (56) все совпадают с λ'; точно так же и корень уравнения (61) равен λ'. Положение это в части, касающейся числа корней, сохраняется и для всех матриц M некоторой окрестности U матрицы M'', ибо $f(\lambda)$ непрерывным образом зависит от матрицы M. Корни уравнения (56) могут сместиться, оставаясь в круге $|\lambda - \lambda'| \leqslant \varepsilon$, но корень уравнения (61) останется равным λ'. Последнее для нас важно.

Пусть теперь M''' — такая матрица из U, что $D(M''') \neq 0$. При $M = M'''$ уравнение (56) уже не имеет корней, совпадающих с λ', и, следовательно, производная $\frac{d^{r-1} f(\lambda)}{d\lambda^{r-1}}$ в этих корнях не обращается в нуль, а это значит, что каждый из возникших корней уравнения (56) уже имеет кратность, меньшую r.

Пусть G — некоторая конечная область в плоскости переменного λ, замыкание которой не пересекается с действительной осью. В области G может иметься лишь конечное число корней уравнения (56). Если при $M = M'$ максимальная кратность корней уравнения (56), входящих в G, равна s, то она не будет больше и для всех матриц M, входящих в некоторую окрестность V матрицы M'. В частности, множество $W(G)$ всех значений матрицы M, для которых в G имеются лишь простые корни уравнения (56), составляет область в пространстве всех матриц M. Применяя ко всем корням уравнения (56), расположенным в G, конечное число раз описанную выше процедуру смещения корней, мы убеждаемся, что область $W(G)$ всюду плотна в пространстве матриц M.

Плоскость переменного λ — за выпуском действительной прямой — покроем счетной суммой областей G_n, $n = 1, 2, \ldots$, примененного выше типа. Пересечение W всех областей $W(G_n)$ всюду плотно в пространстве матриц M и для каждой матрицы $M \in W$ все корни уравнения (56) просты.

Таким образом, лемма 2 полностью доказана.

(А) Если F — произвольная эрмитова матрица, то существует произвольно близкая к ней эрмитова матрица G и произвольно малая эрмитова позитивно-дефинитная матрица E, для которых уравнение (16) имеет лишь простые корни.

Пусть E' — малая позитивно-дефинитная эрмитова матрица. В силу леммы 2 существует матрица M, произвольно близкая к матрице $F + i\mathrm{E}'$ и такая, что уравнение (56) имеет лишь простые корни. Положим

$$G = \frac{1}{2}(M + M^*), \quad \mathrm{E} = \frac{1}{2i}(M - M^*) \quad (M^* \text{ сопряжена с } M).$$

Здесь G — эрмитова матрица, близкая к F, а E — эрмитова матрица, близкая к E'. Так как E близка к E', то E мала и позитивно-дефинитна.

ЛЕММА 3. *Пусть H — унитарное пространство с нормальным ортогональным базисом $e_1, e_2, \ldots, e_k$, $(e_p, e_q) = \delta_{pq}$, A и B — эрмитовы позитивно-дефинитные операторы:*

$$Ae_p = \sum_{q=1}^{k} a_{pq} e_q, \quad Be_p = \sum_{q=1}^{k} b_{pq} e_q$$

и, наконец, $f_1, f_2, \ldots, f_k$ — векторы из H, каждый из которых не равен нулю (они могут быть линейно зависимыми). Тогда матрица $R = \| a_{pq} (Bf_p, f_q) \|$ эрмитова и позитивно-дефинитна.

Доказательство. В силу предположения собственные значения оператора B можно задать в виде $b_1^2, b_2^2, \ldots, b_k^2$, где $b_1, b_2, \ldots, b_k$ — действительные положительные числа. Переход от канонических для оператора B координат к координатам, первоначально заданным в H, дает

$$b_{pq} = \sum_{\alpha=1}^{k} d'_{p\alpha} \overline{d}'_{q\alpha} b_\alpha^2. \tag{62}$$

Здесь матрица $\| d'_{p\alpha} \|$, дающая преобразование координат, не вырождается и потому матрица $\| d_{p\alpha} \|$, определяемая условием $d_{p\alpha} = d'_{p\alpha} b_\alpha$ также не вырождается. Из (62) следует

$$b_{pq} = \sum_{\alpha=1}^{k} d_{p\alpha} \overline{d}_{q\alpha}, \quad B = D^* D, \tag{63}$$

где D — невырождающийся оператор, определяемый условием

$$De_p = \sum_{q=1}^{k} d_{pq} e_q.$$

Положим $g_p = Df_p$, тогда

$$(Bf_p, f_q) = (Df_p, Df_q) = (g_p, g_q). \tag{64}$$

Таким образом, нам нужно доказать позитивную дефинитность матрицы $R = \| a_{pq} (g_p, g_q) \|$, имея в виду, что ни один из векторов $g_1, g_2, \ldots, g_k$ не обращается в нуль.

Координаты вектора g_p обозначим через $g_{1p}, g_{2p}, \ldots, g_{kp}$. Матрицу A, так же как и раньше матрицу B, представим в форме $a_{pq} = \sum_{\beta=1}^{k} c_{p\beta} \overline{c}_{q\beta}$.

Координаты произвольного вектора x из H обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_k$. При этих обозначениях получаем

$$(Rx, x) = \sum_{(\alpha, \beta = 1)}^{k} s_{\alpha\beta} \overline{s}_{\alpha\beta}, \quad s_{\alpha\beta} = \sum_{p=1}^{k} g_{\alpha p} x_p c_{p\beta}. \tag{65}$$

Если $(Rx, x) = 0$, то из (65) следует, что $\sum_{p=1}^{k} g_{\alpha p} x_p c_{p\beta} = 0$. Из этого в свою очередь вытекает

$$g_{\alpha p} x_p = 0, \tag{66}$$

ибо матрица $\| c_{p\beta} \|$ не вырождается. Соотношение (66) можно теперь переписать в форме $x_p g_p = 0$, $p = 1, 2, \ldots, k$; а так как ни один вектор $g_1, g_2, \ldots, g_k$ не равен нулю, то $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$. Таким образом, матрица R дефинитна, а ее позитивность следует из (65).

Итак, лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4*. *Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — комплексные числа с положительными действительными частями, попарно не равные между собой. Введем матрицу $M = \| m_{pq} \|$ соотношением*

$$m_{pq} = \frac{1}{a_p + \bar{a}_q}, \quad (p = 1, \ldots, k; \quad q = 1, \ldots, k).$$

Матрица M оказывается эрмитовой позитивно-дефинитной.

Доказательство. Эрмитовость матрицы M очевидна. Докажем ее позитивность. Для этого вычислим ее детерминант $|M|$.

Элемент m_{pq} будем считать принадлежащим p-ой строке и q-ой колонне. Вычисление детерминанта $|M|$ будем вести путем вычитания последней колонны из всех предыдущих, беря последнюю колонну с надлежащим коэффициентом, с тем, чтобы последняя строка обратилась в нуль. Минор элемента m_{kk} так полученной новой матрицы обозначим через $N = \| n_{pq} \|$, $(p, q) = 1, 2, \ldots, k-1$. Таким образом, мы имеем

$$|M| = m_{kk} |N|.$$

При вычитании из q-ой колонны надлежащим коэффициентом при k-ой колонне будет число $\frac{m_{kq}}{m_{kk}}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} n_{pq} = m_{pq} - \frac{m_{pk} m_{kq}}{m_{kk}} &= \frac{m_{pq} m_{kk} - m_{pk} m_{kq}}{m_{kk}} = \\ &= m_{pq} m_{pk} m_{kq} \left((a_p + \bar{a}_k)(a_k + \bar{a}_q) - (a_p + \bar{a}_q)(a_k + \bar{a}_k) \right) = \\ &= m_{pq} m_{pk} m_{kq} (a_p - a_k)(\bar{a}_q - \bar{a}_k). \end{aligned}$$

Итак,

$$n_{pq} = m_{pq} m_{pk} m_{kq} (a_p - a_k)(\bar{a}_q - \bar{a}_k).$$

При вычислении детерминанта матрицы N можно вынести из ее p-ой строки число $m_{pk}(a_p - a_k)$, а из q-ой колонны — число $m_{kq}(\bar{a}_q - \bar{a}_k)$. Если обозначить теперь минор элемента m_{kk} в матрице M через M', то получаем

* Доказательство этого предложения сообщил мне В. В. Морозов.

$$|M| = m_{kk} \, |M'| \left(\prod_{r=1}^{k-1} m_{rk} \overline{m}_{rk}\right) \cdot \left(\prod_{s=1}^{k-1} (a_s - a_k)(\overline{a}_s - \overline{a}_k)\right).$$

Входящая в этот результат матрица M' имеет тот же вид, что и матрица M, но порядок ее $k-1$. Ее детерминант можно вычислять тем же способом. Согласно очевидной индукции

$$|M| = \prod_{r=1}^{k} m_{rr} \prod_{(p<q)=1}^{k} m_{pq}\overline{m}_{pq} (a_p - a_q)(\overline{a}_p - \overline{a}_q).$$

Вид полученного выражения для $|M|$ показывает, что $|M|$ положительно.

Так как каждый диагональный минор матрицы M имеет тот же вид, что и матрица M, то все эти миноры положительны, а, как известно, это и означает, что эрмитова матрица позитивно-дефинитна.

Итак, лемма 4 доказана.

(B) Неравенство (31) справедливо. Для доказательства положим $a_p = -i\lambda_p$; тогда $a_1, a_2, \ldots, a_k$ все различны и имеют положительную действительную часть. Сверх того, $\frac{i}{\lambda_p - \overline{\lambda}_q} = \frac{1}{a_p + \overline{a}_q}$ и, следовательно, матрица $\left\| \frac{i}{\lambda_p - \overline{\lambda}_q} \right\|$ позитивно-дефинитна (лемма 4). Матрица E позитивно-дефинитна и так как в пространстве H_- квадратичная форма (x, x) не вырождается и отрицательна, то из леммы 3 заключаем, что матрица $\left\| \frac{i}{\lambda_p - \overline{\lambda}_q} (\mathrm{E}f_p; f_q) \right\|$ негативно-дефинитна, а из этого неравенство (31) вытекает непосредственно.

Теперь пробелы в доказательстве основной теоремы 1 заполнены и она окончательно доказана.

Дадим теперь некоторые дополнения к основной теореме и выводы из нее.

(C) Наряду с инвариантным подпространством I, построенным в основной теореме, можно построить аналогичное ему инвариантное подпространство I', на котором квадратичная форма (x, x) неположительна, а собственные значения оператора A все имеют неположительную мнимую часть, причем размерность I' равна k.

Для построения подпространства I' следует провести конструкцию, аналогичную данной в основной теореме, только вместо уравнения (16) нужно рассматривать уравнение

$$|g_{pq} + (R_\lambda u_p, u_q) - i\varepsilon_{pq} - \lambda\delta_{pq}| = 0;$$

последнее имеет в нижней полуплоскости переменного λ ровно k корней.

(D) Пространство I содержит все собственные подпространства S_λ оператора A для собственных значений λ с положительной мнимой частью. Пространство I' содержит все собственные подпространства S_λ оператора A для собственных значений λ с отрицательной мнимой частью (см. основная теорема и (C)).

Докажем предложение (D) только для I; для I' оно ведется аналогично.

Пусть S_λ — собственное подпространство оператора A для собственного значения λ с положительной мнимой частью. Тогда пространство S_λ ортогонально к I, ибо I распадается в прямую сумму собственных подпространств для собственных значений с неотрицательной мнимой частью (§ 2, (A)). В силу предложения (A) § 2 квадратичная форма (x, x) на S_λ тождественно обращается в нуль. Ввиду этих двух обстоятельств и того факта, что квадратичная форма (x, x) неположительна на I, та же квадратичная форма неположительна и на линейной оболочке $S_\lambda + I$ подпространств S_λ и I. Таким образом, размерность $S_\lambda + I$ не превосходит k, но уже размерность I равна k и потому $S_\lambda \subset I$. Таким образом, предложение (D) доказано.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть A — эрмитов оператор с областью определения $\Omega \subset H_k$ и K — прямая сумма всех его собственных подпространств S_λ для невещественных собственных значений λ. Тогда квадратичная форма (x, x) не вырождается на K. Таким образом, все пространство H_k распадается в прямую сумму взаимно ортогональных пространств K и $H'_{k'}$, причем собственные значения оператора A в $H'_{k'}$ все вещественны. (Структура оператора A в конечномерном пространстве K вскрывается предложением* (E).)

Доказательство. Пересечение подпространств K и I обозначим через J, а пересечение подпространств K и I' через J'. Тогда в силу (D) пространство K распадается в прямую сумму своих подпространств J и J'. Допустим теперь, что существует в J' вектор $x' \neq 0$, ортогональный к пространству J. В силу (A) § 2 он ортогонален и ко всему I. Таким образом, линейная оболочка пространства I и вектора x', имеющая размерность $k+1$, обладает тем свойством, что на ней квадратичная форма (x, x) неположительна, что невозможно в силу (B) § 1. Итак, ни один вектор из J', отличный от нуля, не ортогонален к J. Точно так же ни один вектор из J, отличный от нуля, не ортогонален к J'. Так как на пространствах J и J' квадратичная форма (x, x) тождественно обращается в нуль (§ 2, (A)), то из установленного непосредственно вытекает, что квадратичная форма (x, x) не вырождается на K.

Теорема 5 доказана.

(E) Пусть K — конечномерное пространство типа H_k и A — действующий в нем эрмитов оператор, все собственные значения которого в K невещественны. Разложим K в прямую сумму подпространств J и J',

причем J составлено из всех собственных подпространств S_λ собственных значений λ с положительной мнимой частью, а J' составлено из всех собственных подпространств оператора A, отнесенных к собственным значениям с отрицательной мнимой частью. Оказывается, что при произвольном выборе координат в J можно подобрать такие координаты в J', что в матричной форме оператор A записывается в виде

$$A = \begin{Vmatrix} B & 0 \\ 0 & B^* \end{Vmatrix}, \tag{67}$$

где B — матрица, действующая в J, а B^* — матрица, действующая в J'. Здесь B^* — матрица, сопряженная с B (комплексно сопряженная и транспонированная). Из сказанного, в частности, следует, что элементарные делители оператора A, отнесенные к собственному значению λ, могут быть поставлены во взаимно однозначное соответствие с элементарными делителями оператора A, отнесенными к собственному значению $\bar{\lambda}$, так что порядки соответствующих элементарных делителей одинаковы.

Для доказательства предложения (E) введем в J линейно независимый базис $e_1, e_2, \ldots, e_r$, а в J'—линейно независимый базис $f_1, f_2, \ldots, f_s$. Положим

$$Ae_p = \sum_{\alpha=1}^{r} b_{p\alpha} e_\alpha, \quad Af_q = \sum_{\beta=1}^{s} c_{q\beta} f_\beta, \quad B = \| b_{p\alpha} \|, \quad C = \| c_{q\beta} \|.$$

Так как подпространства J и J' инвариантны относительно A, то в матричной форме A получает вид:

$$A = \begin{Vmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{Vmatrix}. \tag{68}$$

Далее, $(e_p, e_\alpha) = 0$, $(f_q, f_\beta) = 0$. В силу этого и на основании того, что квадратичная форма (x, x) не вырождена на K, матрица $\| e_p, f_r \|$ должна быть квадратной и иметь детерминант, отличный от нуля. Выбирая надлежащим образом базис J', можно достичь того, чтобы $(e_p, f_q) = \delta_{pq}$. Таким образом,

$$(e_p, f_q) = \delta_{pq}, \quad (e_p, e_\alpha) = 0, \quad (f_q, f_\beta) = 0. \tag{69}$$

Условие эрмитовости оператора A при выбранных базисах приобретает теперь следующий вид:

$$(Ae_p, f_q) = b_{pq} = (e_p, Af_q) = \bar{c}_{qp}.$$

Таким образом, $C = B^*$, и предложение (E) доказано.

(F) Пусть A — эрмитов оператор с областью определения $\Omega \subset H_k$ и J — его инвариантное подпространство, составленное из всех собственных подпространств S_λ при λ, имеющих положительную мнимую часть. Если размерность J равна k, то H_k распадается в прямую сумму инвариантного подпространства K размерности $2k$ и инвариантного гильбертова подпространства H.

Если осуществлены предположения, указанные в (F), то $I = J$ и $I' = J'$. Положим $K = I + I'$. Квадратичная форма (x, x) не вырождается на K (теорема 5). Будем считать, что в K введен базис $e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_k$, предусмотренный в (E). Тогда $x \in K$ записывается в виде

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_k e_k + y_1 f_1 + \ldots + y_k f_k$$

и квадратичная форма (x, x) получает вид

$$(x, x) = \sum_{p=1}^{k} x_p \bar{y}_p + \bar{x}_p y_p \qquad (\text{см. } (69)).$$

Введем теперь в K новые координаты, положив

$$x_p = u_p + v_p, \qquad y_p = u_p - v_p.$$

Тогда квадратичная форма (x, x) на K получает следующий вид:

$$(x, x) = \sum_{p=1}^{k} 2 (u_p \bar{u}_p - v_p \bar{v}_p).$$

Таким образом, квадратичная форма (x, x) на K имеет ровно k отрицательных квадратов и, следовательно, на ортогональном дополнении H_0 к K квадратичная форма (x, x) уже не имеет отрицательных квадратов, а это и значит, что H_0 — обыкновенное гильбертово пространство.

Итак, предложение (F) доказано.

Оценку размерности собственного подпространства S_λ для комплексного собственного значения λ дает следующее предложение:

(G) Пусть A — эрмитов оператор с областью определения $\Omega \subset H_k$. Рассмотрим уравнение (14)

$$|f_{pq} + (R_\lambda u_p, u_q) - \lambda \delta_{pq}| = 0. \tag{70}$$

Оказывается, что невещественное число λ тогда и только тогда является собственным значением оператора A, когда оно есть корень уравнения (70). Кратность же корня λ равна размерности собственного подпространства S_λ оператора A.

При доказательстве этого предложения будем опираться на некоторые детали доказательства основной теоремы. Здесь мы рассмотрим

лишь тот случай, когда λ имеет положительную мнимую часть; при отрицательной мнимой части доказательство ведется аналогично.

Наряду с уравнением (14) = (70) рассмотрим уравнение (16):

$$| g_{pq}^{(n)} + (R_\lambda u_p, u_q) + i\varepsilon_{pq}^{(n)} - \lambda\delta_{pq} | = 0, \tag{71}$$

где последовательности $G^{(n)}$ и $E^{(n)}$ ($n = 1, 2, \ldots$) уже выбраны так, как это указано при доказательстве основной теоремы, т. е., в частности, оператор $\Lambda^{(n)}$, действующий в H_-, сходится к оператору M.

Как было показано при доказательстве основной теоремы, корни уравнения (71), лежащие в верхней полуплоскости, все просты и число их равно k. Значения этих корней обозначим через

$$\lambda_1^{(n)}, \ \lambda_2^{(n)}, \ \ldots, \ \lambda_k^{(n)}. \tag{72}$$

Числа (72) являются собственными значениями оператора $\Lambda^{(n)}$ и, следовательно, удовлетворяют уравнению

$$| \Lambda^{(n)} - \lambda E | = 0. \tag{73}$$

Так как оператор $\Lambda^{(n)}$ сходится к оператору M, то числа (72) сходятся к корням уравнения

$$| \mathrm{M} - \mu E | = 0. \tag{74}$$

и, в частности, существует $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_p^{(n)} = \mu_p$; причем μ_p является корнем уравнения (74). Числа

$$\mu_1, \ \mu_2, \ \ldots, \ \mu_k$$

уже не все различны. Кратность любого корня μ уравнения (74) равна размерности собственного подпространства T_μ оператора M. Так как оператор M, действующий в пространстве H_-, эквивалентен оператору A, рассматриваемому на I, то размерность подпространства T_μ равна размерности собственного подпространства S_μ оператора A в пространстве I. В том случае, когда μ — комплексное число с положительной мнимой частью, собственное подпространство S_μ оператора A во всем пространстве H_k совпадает с собственным подпространством S'_μ оператора A в пространстве I (см. (D)). Таким образом, размерность подпространства S_μ равна кратности корня μ в уравнении (74), если только μ имеет положительную мнимую часть.

Так как левая часть уравнения (73) сходится к левой части уравнения (74), то кратность корня μ в уравнении (74) совпадает с числом корней уравнения (73), стремящихся к μ при $n \to \infty$. Корни уравнения (73) совпадают с корнями уравнения (71) в верхней полуплоскости неизвестного. Так как в верхней полуплоскости левая часть уравнения (71) равномерно сходится к левой части уравнения (70), то число корней системы (72), стремящихся к комплексному числу μ (при положительной мнимой части у числа μ), равно кратности корня μ в уравнении (70). Таким образом, кратность корня μ в уравнении (70) равна размерности собственного подпространства.

Итак, предложение (G) доказано.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть A — эрмитов оператор с областью определения $\Omega \subset H_k$. Рассмотрим уравнение* (14) = (70)

$$|f_{pq} + (R_\lambda u_p; u_q) - \lambda\delta_{pq}| = 0. \tag{75}$$

Оказывается, что если число корней этого уравнения, обладающих положительной мнимой частью с учетом их кратности, равно k (больше k число это быть не может), то пространство H_k разлагается в прямую сумму инвариантного подпространства K размерности $2k$ и ортогонального ему инвариантного гильбертова пространства H_0.

Доказательство. Доказательство непосредственно вытекает из предложений (F) и (G).

Поступило
1. XII. 1943

L. PONTRJAGIN. HERMITIAN OPERATORS IN SPACES WITH INDEFINITE METRIC

SUMMARY

In this paper we investigate the space H_k consisting, like Hilbert space, of all sequences of complex numbers $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ with the finite sums $\sum_n |x_n|^2$, in which the scalar product is however defined by the equality

$$(x, y) = -x_1\bar{y}_1 - \ldots - x_k\bar{y}_k + x_{k+1}\bar{y}_{k+1} + \ldots$$

We first establish some elementary properties of the space H_k, but the main purpose of the paper is the investigation of Hermitian operators transforming the space H_k. The main result is the following one: *for each Hermitian operator A there exists an invariant subspace $I \subset H_k$ of finite dimension k such that the* eigen-*values of A in I have non-negative real parts and $(x, x) \leqslant 0$ for every $x \in I$.*

Definition 1. The space H_k consists of all sequences

$$x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$$

with the number of terms equal to $n \geqslant k$ (the finite-dimensional case) or to infinity (the infinite-dimensional case), for which the series

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \ldots + x_k\bar{x}_k + \ldots$$

converge. The convergence and the linear operations in H_k are determined in the same way as in the finite-dimensional affine space or in the Hilbert space respectively. The scalar product (x, y) of vectors x and y are defined by the formula

$$(x, y) = -x_1\bar{y}_1 - x_2\bar{y}_2 - \ldots - x_k\bar{y}_k + x_{k+1}\bar{y}_{k+1} + \ldots \qquad (1)$$

To convert H_k into a Banach space it suffices to define the norm

$$\|x\|^2 = x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \ldots + x_k\bar{x}_k + \ldots \qquad (2)$$

Two vectors x and y in H_k are said to be orthogonal when $(x, y) = 0$. Let Q be a linear subspace of the space H_k. By the orthogonal complement Q' of Q in H_k we mean the set of vectors orthogonal to every vector in Q. The subspaces Q and Q' may possess common nonzero elements. We say in this case that the quadratic form is degenerate on the subspace Q. If the only vectors belonging both to Q and Q' is zero, we say that (x, x) is non-degenerate on Q.

Let H_k, H_l be any two spaces of the type described by Definition 1 and Q, R be subspaces of H_k, H_l respectively. A linear mapping f from Q *onto* R will be called isomorphic if the scalar product rests invariant under f. An isomorphic mapping of H_k onto itself will be called an automorphism of H_k.

It is easy to prove the following statement:

(A) Let Q be a subspace of H_k, on which the quadratic form (x, x) is non-positive, i. e. $(x, x) \leqslant 0$ for each $x \in Q$. Then the dimension of the subspace Q does not exceed k.

Denote by H_- the subspace of the space H_k consisting of the vectors x, for which $x_{k+1} = \ldots = x_{k+n} = \ldots = 0$. The subspace of H_k consisting of the vectors x such that $x_1 = \ldots = \ldots = x_k = 0$ will be denoted by H_+. H_- is an Euclidean space, H_+ is either Euclidean or the Hilbert space.

We prove the following

THEOREM 1. *Let Q be a subspace of the space H_k, on which the quadratic form (x, x) is non-degenerate. There exists an automorphism f of the space H_k which carries the subspace Q into the direct sum of subspaces R_- and R_+ such that $R_- \subset H_-$, $R_+ \subset H_+$.*

This implies immediately:

(a) Q is isomorphic to a space H'_l of the type described by definition 1 with $l \leqslant k$.

(b) The quadratic form (x, x) is non-degenerate on the orthogonal complement Q' of Q in H_k.

(c) The orthogonal complement of Q' in H_k coincides with Q and H_k is decomposed into the direct sum of the mutually orthogonal subspaces Q and Q', so that it is possible to project H_k orthogonally into Q, as well as into Q'.

Theorem 1 closes the study of the space H_k itself. We now procede to the investigation of linear operators in H_k.

Since H_k is a Banach space, we do not need to redefine the notions of the linear functional and the linear operator in H_k. We simply have to revise the facts of the theory of linear operators in Hilbert space that are connected with the concept of the scalar product. We find here some essential deviations from this theory.

The identical operator will be denoted by E, $Ex = x$. The domain Ω of a linear operator A is supposed to be dense in H_k. A linear operator A will be called symmetric if

$$(Ax, y) = (x, Ay) \tag{3}$$

for any two vectors x, y belonging to its domain. Contrary to what takes place in the usual theory, a symmetric operator in H_k may possess complex *eigen*-values and non-simple elementary divisors. The numbers of them both are however connected with k by considerably strong restrictions. A vector x is said to be attached to the *eigen*-value λ of an operator A if there is a positive integer r such that

$$(A - \lambda E)^r x = 0. \tag{4}$$

The set of all vectors attached to an *eigen*-value λ of the operator A forms a linear manifold S_λ in H_k which is called the *eigen*-manifold of the number λ for the operator A.

In the paper we prove the statements (B), (C) and Theorem 2.

(B) Let $\lambda \neq \bar{\mu}$. Then the vectors x and y attached to the *eigen*-values λ and μ of a symmetric operator A are orthogonal or, which is the same,

the *eigen*-manifolds S_λ and S_μ are orthogonal. In particular, if λ is complex and $\lambda=\bar{\mu}$, then the *eigen*-manifold S_λ is orthogonal to itself, i. e. the quadratic form (x, x) vanishes identically on S_λ, and the dimension of S_λ does not exceed k (see (A)).

(C) Let S_α be the *eigen*-manifold of a real *eigen*-value α of a closed symmetric operator A in the space H_k. Then S_λ is closed in H_k and is decomposable into the direct sum of two mutually orthogonal subspaces S and S' invariant under A. Here S is finite-dimensional, while S' consists of the *eigen*-vectors of the operator A_x and the quadratic form (x, x) is positive everywhere on S' so that S' is the Hilbert space (let us note that, if S_λ itself is finite-dimensional, then we may take $S=S_\alpha$). The operator A, being considered on the finite-dimensional subspace S, has the following properties: if $D_1, D_2, \ldots, D_r$ are elementary divisors of A in S and $d_1, d_2, \ldots, d_r$ are their orders, then the number of non-simple elementary divisors of the given order is an invariant of the operator A and of the number α. Further, if we put

$$\rho(\alpha)=\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{d_i}{2}\right], \tag{5}$$

where $\left[\frac{d_i}{2}\right]$ is the integral part of $\frac{d_i}{2}$, then there exists a subspace P_α of S of dimension $\rho(\alpha)$ such that the quadratic form (x, x) is zero on P_α identically and hence $\rho(\alpha)\leqslant k$ (see (A)).

THEOREM 2. *Let λ be an* eigen-*value of a closed symmetric operator A in the space H_k. If λ is not real, then $\rho(\lambda)$ denotes the dimension of the* eigen-*manifold attached to λ, if λ is real, then $\rho(\lambda)$ denotes the number introduced in* (C). *For any real λ the number $\rho(\lambda)$ is zero, whenever the corresponding* eigen-*manifold consists of* eigen-*vectors only, i. e. whenever all the elementary divisors belonging to λ are simple. Let us choose any arbitrary system of* eigen-*values $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ under the only condition that it contains no conjugate numbers (such is, in particular, the system of* eigen-*values with non-negative imaginary parts). Then the following inequality takes place:*

$$\rho(\lambda_1)+\rho(\lambda_2)+\ldots+\rho(\lambda_n)\leqslant k.$$

Hermitian operators in H_k can be defined in the same way as in Hilbert space.

Definition 2. Let A be a linear operator in H_k with the domain Ω. It is possible that for an $y\in H_k$ and all $x\in\Omega$

$$(Ax, y)=(x, z). \tag{6}$$

Denote by Ω^* the totality of all y's satisfying (6) and put $z=A^*y$. Since Ω is everywhere dense in H_k, (6) determines z uniquely and thus A^* is a linear operator with the domain Ω^*. The operator A^* is called adjoint

to A. If $A^*=A$, i. e. $\Omega^*=\Omega$ and $A^*x=Ax$ for any $x\in\Omega$, then A is called Hermitian operator.

We also introduce the notion of projection in H_k quite analogously to the case of Hilbert space.

(D) A continuous Hermitian operator P is called projection if $P^2=P$. Let P be a projection. Then the set H' of the vectors of form Px, where $x\in H_k$, is a subspace of the space H_k, on which the quadratic form (x, x) is non-degenerate. If H'' is the orthogonal complement of H' in H_k then

$$Px'=x', \quad Px''=0 \tag{7}$$

for any $x'\in H'$, $x''\in H''$. It is evident that the operator P is uniquely determined by the conditions (7), whenever the subspace H' is fixed. Given a subspace H' on which the quadratic form is non-degenerate, we take its complement H'' and the projection P determined by (7). The projection P and the subspace H' are said to correspond to one another.

(E) Suppose that A is an Hermitian operator with the domain $\Omega\subset H_k$, $H''\subset\Omega$ is a finite-dimensional subspace of the space H_k, on which the quadratic form (x, x) is non-degenerate, and H' is the orthogonal complement of H' in H_k. Let P be the projection corresponding to the subspace H' (see (D)). Then $B=PAP$ is also an Hermitian operator and its domain is Ω. The operator B considered on the subspace H' only is also Hermitian and its domain in H' is $\Omega'=\Omega\cap H'$.

FUNDAMENTAL THEOREM. *Let A be an Hermitian operator with the domain $\Omega\subset H_k$. There exists in H_k an invariant subspace I of dimension k, on which the quadratic form (x, x) is non-negative, i. e. $(x, x)\leqslant 0$ for every $x\in I$. Moreover, all* eigen-*values of A in I have non-negative imaginary parts.*

Proof. We first choose such coordinates in H_k that $H_-\subset\Omega$, which is possible by theorem 1, Ω being everywhere dense in H_k. Suppose that a normed orthogonal basis in H_k is chosen consisting of vectors $e_1, e_2, \ldots, e_k$. We thus have

$$(e_p, e_q)=-\delta_{pq}, \quad e_p\in\Omega, \quad p=1, 2, \ldots, k; \ q=1, 2, \ldots, k. \tag{8}$$

All the following will be based upon the representation of the space H_k as the direct sum: $H_- \dotplus H_+$. Correspondingly, we put any vector in H_k in the form:

$$c+x=\sum_{p=1}^{k} c_p e_p+x, \quad c\in H_-, \quad x\in H_+. \tag{9}$$

Let P and P' denote the projections corresponding to the subspaces H_+ and H_- respectively (see (D)). Let

$$F=P'AP', \quad V=PAP. \tag{10}$$

F is an Hermitian operator in H_-, V is an Hermitian operator in H_+. The domain of the latter is $\Omega' = \Omega \cap H_+$ (see (E)). We have

$$A = (P + P')\,A\,(P + P') = V + F + PAP' + P'AP. \tag{11}$$

In virtue of (11)

$$Ae_p = Fe_p - u_p = \sum_{q=1}^{k} f_{pq}e_q - u_p, \quad u_p \in H_+, \tag{12}$$

$$Ax = Vx + P'Ax, \quad P'Ax = y \in H_-, \quad x \in H_+. \tag{13}$$

The operator A being Hermitian, we can express y from (13) as follows:

$$Ax = Vx + \sum_{p=1}^{k} (x, u_p)\, e_p. \tag{14}$$

Joining (12) and (14) and keeping in mind (9), we finally obtain

$$A(c + x) = \sum_{p,q=1}^{k} f_{pq}c_p e_q + \sum_{q=1}^{k} (x, u_q)\, e_q + Vx - \sum_{p=1}^{k} c_p u_p. \tag{15}$$

Let us find the *eigen*-vector $c + x$ of the operator A. We must have

$$A(c + x) = \lambda (c + x).$$

In view of (15), we may put this relation in the form:

$$\sum_{p=1}^{k} f_{pq}c_p + (x, u_q) = \lambda c_q, \tag{16}$$

$$Vx - \sum_{p=1}^{k} c_p u_p = \lambda x. \tag{17}$$

We now have to solve the system of equations (16) and (17). For this purpose consider the resolvent R_λ of the Hermitian operator V in H_+. Since H_+ is the usual Hilbert space, this resolvent is determined for all complex (non-real) values of λ. The following calculations have an euristic character and therefore one must not care for their validity for all possible values of the variables. We put (17) in the form:

$$x = \sum_{p=1}^{k} c_p R_\lambda u_p. \tag{18}$$

Substituting this x in (16), we obtain

$$\sum_{p=1}^{k} f_{pq}c_p + \sum_{p=1}^{k} (R_\lambda u_p, u_q)\, c_p = \lambda c_q. \tag{19}$$

In this equation λ and the coordinates $c_1, c_2, \ldots, c_k$ of the vector c are unknown. The operator function R_λ of the parameter λ, the vectors $u_1, u_2, \ldots, u_k$ and the matrix $\|f_{pq}\|$ are determined by the operator A, as well as by the choice of coordinates in H_k. The equality (19) represents

a system of homogeneous linear equations with respect to $c_1, c_2, \ldots, c_n$. In order that this system have a non-trivial solution $c \neq 0$ it is necessary and sufficient that the determinant of the system be zero, i. e.

$$|f_{pq} + (R_\lambda u_p, u_q) - \lambda\delta_{pq}| = 0. \tag{20}$$

If the equation (20) has a non-real solution λ, then the operator R_λ is determined for each vector in H_+, in particular, for the vectors $u_1, \ldots, u_k$. In this case all the calculations can be carried through in the inverse order, and we thus find an *eigen*-vector $c + x$, $c \neq 0$, of the operator A attached to the non-real *eigen*-value. Conversely, if the operator A has an *eigen*-vector $c + x$ attached to the non-real *eigen*-value λ, then all the above calculations have sense and the vector c is non zero, because the vector x whose scalar square (x, x) is positive cannot be an *eigen*-vector attached to the complex *eigen*-value λ (see (B)). Thus the operator A has a non-real *eigen*-value λ satisfying the equation (20).

It is easy to give an example of an Hermitian operator A in a (finite-dimensional) space H_k, all the *eigen*-values of which are real. Thus the equation (20) may possess no complex root at all.

Consider now, instead of (20), the equation

$$|g_{pq} + (R_\lambda u_p, u_q) - \lambda\delta_{pq}| = 0, \quad \|g_{pq}\| = G, \tag{21}$$

where G is a non-Hermitian matrix satisfying, however, the condition that $\frac{1}{2i}(G + G^*)$ is an Hermitian positive-definite matrix. By a considerably complicated discussion one can prove that there exists a matrix G arbitrarily close to F, which satisfies the same condition and for which the equation (21) has strictly k simple roots with positive imaginary part. Denote these roots by $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Consider now the equation

$$\sum_{p=1}^{k} g_{pq} c_p + \sum_{p=1}^{k} (R_{\lambda_r} u_p, u_q)\, c_p = \lambda_r c_q \tag{22}$$

analogous to (19). This equation possesses a non-trivial solution which we denote by c^r (c^r is a vector in H_-).

We put

$$x^r = -\sum_{p=1}^{k} (c^r, e_p)\, R_{\lambda_r} u_p \qquad \text{(see (18))}.$$

We then put $z^r = c^r + x^r$. We prove that $z^1, z^2, \ldots, z^k$ are linearly independent. Denote by $I(G)$ the linear hull over these vectors (the notation shows explicitly that it depends on the matrix G). We prove that for a suitable sequence of matrices G converging to F the spaces $I(G)$ tend to a space I, which is the required invariant subspace.

This completes the proof of the fundamental theorem. Some corollaries of the latter are further deduced.

СОДЕРЖАНИЕ ТОМА 8

TABLE DES MATIÈRES DU TOME 8